SF2719 Matematikens Historia
Hemuppgifter 2016.

Denna sida kan nås via www.math.kth.se/~jockum .
Vid allvarliga tryckfel eller missförstånd, kontakta
jockum@math.kth.se alias jockum@kth.se .
OM Du tycker att någon uppgift nedan bör skrivas om, formuleras bättre eller mer utförligt, kontakta då föreläsaren.

OBS. Nedan skriver vi emellanåt xx i stället för x^2 alias x i kvadrat. Du behöver inte skriva på detta sätt.

****

1) Visa att parallellpostulatet behövs för att kunna visa att vinkelsumman i en (vanlig plan) triangel är lika med två räta vinklar alias 180 grader.

2) Visa satsen om centrumvinkel och periferivinkel. Flera olika fall behöver behandlas.

3) Visa att cirkelns symptom $yy = x(D - x)$ övergår i cirkelns vanliga ekvation om man byter koordinater.

4) Visa hur man från symptomen för ellips och hyperbel hos Apollonios

$yy = px \pm pxx/2a$

kan få dessa kägelsnitts vanliga ekvationer innehållande termerna

uu/aa och vv/bb.

5) Givet en parabel med symptom $yy = px$. Sök finna sträckan p i y-led i figuren. Finns det någon koppling till parabelns brännpunkt (fokus)? Sträckan p *finns* nämligen i figuren, och är *kopplad* till focus. Rita figur!

6 a) Givet en parabel P med ekvation $xx = qy$, där som vanligt x-axeln pekar åt höger och y-axeln pekar rakt upp. Antag att en rät linje K skär P uti exakt EN punkt. Visa att linjen K då MÅSTE vara ANTINGEN en tangentlinje till P, ELLER en lodrät linje. (Det finns alltså *exakt* tvenne räta linjer med detta villkor!) Rita figur!

6 b) (Denna uppgift bygger på föregående uppgift.) Givet en godtycklig parabel P i planet. Låt A vara en godtycklig punkt på P. Låt T vara tangenten till P i punkten A och låt L vara den (enligt 6 a unika) ANDRA linjen genom A, som inte skär parabeln P i någon annan punkt.

Låt nu T vara r-axel och L vara s-axel i ett (i allmänhet snett) koordinatsystem.

Visa att ekvationen för parabeln P uti detta nya koordinatsystem blir utomordentligt enkel, nämligen av typ $rr = bs$, där b är en parameter.

7) Arkhimedes' sats om parabelsegment: Visa att förhållandet mellan arean av ett (snett) parabelsegment och arean av den största möjliga inskrivna triangeln är såsom $4 : 3$. Denna uppgift får lösas medelst koordinater. Rita figur!

8) Låt K vara en cirkel. Låt tangentlinjen L tangera cirkeln K i punkten T. Drag en korda AB mellan två punkter A och B på cirkeln K och förläng den utanför cirkeln tills den skär (träffar, möter) tangenten L i punkten M. Vi har nu en cirkel ATB, en tangent TM och en sekant ABM (eller BAM).

Visa att AM gånger BM är lika med TM i kvadrat.

9 a) En punkt A speglas i en cirkel K med medelpunkt C och radie $r =$ CM.

Spegelpunkten kallas B. Här ligger punkten M på den räta linjen mellan A och B. Visa att CA gånger CB är lika med avståndet CM i kvadrat.

9 b) Fortsättning på föregående uppgift.

Vad kan sägas om gränsvärdet av förhållandet

CA – CM : CM – CB

då punkten A går mot punkten M på cirkeln K?

10) Försök visa Ptolemaios' vackra sats för en fyrsiding, som är inskriven i en cirkel:

Produkten av diagonalernas längder är lika med summan av produkterna av de parvis motstående sidornas längder.

11) Generera fem olika pythagoreiska taltripplar genom att se på Gaussiska heltal av typen $w = (a+ib)^2$, där a och b är vanliga heltal. De fem rätvinkliga trianglar, som dessa taltripplar motsvarar, skall alla ha olika form.

12) Kan Du visa Menelaos' vackra sats om förhållandet mellan sex sträckor, då en rät linje skär två sidor i en triangel och förlängningen av triangelns tredje sida?

13) Förklara hur man kan konstruera en regelbunden pentagon med endast passare och linjal. Vilket irrationellt tal är det man först måste konstruera?

Antingen kan man gå tillväga som Eukleides, eller också kan man faktorisera femtegradspolynomet $x^5 - 1$ med god hjälp av Eulers formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Visa först att nollställena till polynomet $p(z) = z^5 - 1$ är de fem olika komplexa talen $\omega_k = \omega_1^k$, där $\omega_1 = \exp 2\pi i/5$.

Visa sedan att polynomet $p(z)$ kan skrivas $(z-1)(z^2-az+1)(z^2-bz+1)$ där $a = 2\cos 72^0$ och $b = 2\cos 144^0$.

Beräkna exakt talen a och b.

...

Konstruera nu en exakt regelbunden pentagon.

Ett hopp i numreringen.

Haer skulle passa: Bas 60, crd(1 grad), Cardanos formel, diskriminant foer poly av grad tre, vinkeloeverskott foer sfaerisk triangel, kedjebraak

20) Denna uppgift har som mål att klassificera nivåkurvorna (i planet) för en kvadratisk funktion $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y$. (Här förutsätts att de tre konstanterna a, b, c ej samtidigt är noll.) Vi börjar med att studera nivåkurvorna för den associerade kvadratiska formen $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, som kan skrivas

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

där M är den symmetriska matrisen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

med determinant $\delta = \det M = ac - b^2$ och spår $\sigma = \mathrm{Sp}\, M = \mathrm{tr}\, M = a + c$.

a) När blir nivåkurvorna för Q cirklar? För f? Försök uttrycka svaret i termer av M.
b) När får vi ellipser för Q och för f?
c) När blir nästan alla nivåkurvor för Q och f hyperbler?
d)* I gränsfallen mellan ellipser och hyperbler brukar man finna parablerna. Kan Du reda ut vilka fall som ger parabler? Här räcker det inte att betrakta enbart Q utan hänsyn måste tagas till hela f . Svaret får innehålla både δ och σ, men även α och β.

21) Givet en parabel med symptom (ekvation) $y^2 = p\,x$, där parametern p betyder en given positiv sträcka.
a) Bestäm koordinaterna $(q, 0)$ för focus F (alias fokus eller brännpunkten).
b) Inför polära koordinater (r, θ) **relativt brännpunkten** F :

$$\begin{cases} x = q + r\cos\theta \\ y = \quad\; r\sin\theta \ . \end{cases}$$

Visa att parabelns ekvation i dessa polära koordinater ges av att

$$r = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{(1-\cos\theta)} \qquad \text{eller} \qquad \frac{1}{r} = \frac{2}{p} \cdot (1-\cos\theta) \ .$$

22)** En fri fortsättning från föregående uppgift. Givet en ellips med symptom $y^2 = p\,x\,(1 - x/2a)$, där a är halva storaxeln.

a) Visa att koordinatbytet

$$\begin{cases} u = x - a \\ \mathrm{v} = y \ . \end{cases}$$

med nya parametrar b, γ och eccentriciteten ε givna av $b^2 = ap/2 \quad , \quad \gamma^2 = a^2 - b^2$ och $\varepsilon = \gamma/a$, ger oss ellipsens ekvation på standardform och med brännpunkter (foci) i punkterna $u = \pm\gamma, \mathrm{v} = 0$.

b) Inför polära koordinater (r, θ) **relativt vänstra brännpunkten** F :

$$\begin{cases} u = -\gamma + r\cos\theta = r\,c - \gamma \\ \mathrm{v} = \qquad r\sin\theta = r\,s \ , \end{cases}$$

där vi skriver $c = \cos\theta$ och $s = \sin\theta$.
Visa att ellipsens ekvation i dessa polära koordinater ges av att

$$r \ = \ \frac{ap}{2} \cdot \frac{(a + \gamma c)}{(\frac{ap}{2}\, c^2 + a^2\, s^2)} \ = \ \frac{ap}{2} \cdot \frac{(a + \gamma c)}{(a^2 - \gamma^2\, c^2)} = \frac{ap}{2} \cdot \frac{1}{a - \gamma\, c} \ = \ \frac{ap}{2} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon\, c}$$

varav

$$\frac{1}{r} \ = \ \frac{2}{p} \cdot (1 - \varepsilon\ \cos\theta) \ = \ \frac{a}{b^2} \cdot (1 - \varepsilon\ \cos\theta) \qquad \text{foer alla } \theta.$$

Här kan man avläsa fallen

$\varepsilon = 0$, cirkel,

$0 < \varepsilon < 1$, ellips,

och gränsfallet då p och $p/2 = b^2/a$ hålls fixa, samtidigt som
$a \to \infty$, $b \to \infty$, $\gamma \to \infty$ och $\varepsilon \to 1$,
så att den allt (av)längre ellipsen tenderar mot en parabel (med $\varepsilon = 1$).

23)*** Man anar att liknande polärt koordinatbyte kan genomföras även för hyperbeln
$y^2 = p\,x\,(1 + x/2a)$
relativt dess ena brännpunkt, med den skillnaden att eccentriciteten ε då blir större än 1.