KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
Institutionen för matematik
Karim Daho-Ari Laptev

Svar-Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201 komplex analys för E,F,T . Tisdagen den 24 oktober 2000 kl 14^{00}-19^{00}.

Tal 1. Enligt ats 6 sid 74 måste u vara harmonisk . Detta ger att $\Delta u = 0 \Rightarrow a = 1.$ standart metod t.ex Exampel1 sid 74 ger med $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ att $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + k$.Således har vi $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3 + k\right) = \left(x + iy\right)^3 + ik$, där k är en reell konstant.

Svar: $f(z) = z^3 + ik$.

Tal 2. $\tan\left(\frac{z}{2}\right) = 2i \Leftrightarrow \frac{\sin(z/2)}{\cos(z/2)} = 2i \Leftrightarrow \frac{(e^{iz/2} - e^{-iz/2})/2i}{(e^{iz/2} + e^{-iz/2})/2} = 2i$

$$\frac{e^{-iz/2}\left(e^{iz} - 1\right)}{e^{-iz/2}\left(e^{iz} + 1\right)} = -2 \Leftrightarrow \frac{\left(e^{iz} - 1\right)}{\left(e^{iz} + 1\right)} = -2 \Leftrightarrow 3e^{iz} = -1 \Rightarrow$$

$$e^{iz} = -1/3 \Rightarrow iz = \log(-1/3) = \ln(1/3) + i(\pi + 2\pi n)$$

Svar: $z_n = (1 + 2n)\pi + i\ln 3, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Tal 3. Vi använder den välkända serien $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$ för att lösa talet.

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \left[\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}\right]$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad |z| > 2.$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3\left(1 - \frac{z}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3.$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \left[\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}\right] = \left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right).$$

Svar: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad 2 < |z| < 3, \quad \begin{cases} c_n = -\frac{1}{3^{n+1}}, & n = 0,1,2,\ldots \\ c_{-n} = -2^{n-1}, & n = 1,2,3 \end{cases}$

Tal 4. a) Lägg t.ex ett snitt längs x-axeln $S=\{z=x+iy: y=0, -\infty < x \le 1\}$ domänen $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$ är enkelt samanhängande , och enligt sats 6 sid 176 har $f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1/2}{z-1}-\frac{1/2}{z+1}$ har en analytisk primitiv funktion $F(z)=\frac{1}{2}\left(\log(z-1)-\log(z+1)\right)$. Således har vi

$$\int_2^i f(z)dz=\left[F(z)\right]_2^1=\frac{1}{2}\left[\ln|z-1|+i\arg(z-1)+2\pi n\right]_2^i-\frac{1}{2}\left[\ln|z+1|+i\arg(z+1)+2\pi m\right]_2^i=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\ln\sqrt{2}+i\frac{3\pi}{4}-\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}-(\ln 1+i\cdot 0-\ln 3-i\cdot 0)\right\}=\frac{1}{2}\left(\ln 3+i\frac{\pi}{2}\right).$$

Delsvar: $\int_{väg1} f(z)dz=\int_2^i f(z)dz=\frac{\ln 3}{2}+i\frac{\pi}{4}$.

b). väg1 - väg 2 en en enkel sluten kurva positivt orienterad som omsluter enbart polen $z=1$.residukalkylen ger då

$$\int_{väg1} f(z)dz-\int_{väg2} f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]=\frac{\ln 3}{2}+i\frac{\pi}{4}-i\pi=\frac{\ln 3}{2}-\frac{3\pi}{4}$$

<u>Delsvar=</u> $\int_{väg2} f(z)dz=\int_2^i f(z)dz=\frac{\ln 3}{2}-i\frac{3\pi}{4}$.

Tal 5.

a). $f(z)=(-4z)+\left(e^z-1\right)=g(z)+h(z)$. på $|z|=1$ har vi $|g(z)|=4|z|=4$ och $|h(z)|=\left|e^z-1\right|=\le\left|e^z\right|+1=e^x+1=\left[|z|=1\right]=e+1<4$.

Rouches sats ger då $f(z)$ har lika många nollställen som $g(z)$ innanför $|z|=1$. dvs ett nollställe

<u>Svar:</u> $f(z)$ har ett nollställe innanför $|z|=1$.

b). Btrakta Halvcirkeln med radie R som ligger i vänstra halvplanet

$C_R=\gamma_R+I_R;\quad \gamma_R=\{z:\ |z|=R,\quad \mathrm{Re}\,z<0\},\quad I_R=\{z:\ \mathrm{Re}\,z=0, -R\le \mathrm{Im}\,z\le R\}$

På γ_R har vi $f(z)=z^5+z^4+z+16=z^5\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^4}+16\frac{1}{z^5}\right)=z^5(1+p(z))$.

Detta ger att $\arg\left(z^5(1+p(z))\right)=5\arg z+\arg(1+p(z))$. Således har vi $\lim_{R\to\infty}\Delta_{\gamma_R} f(z)=5\pi$.

Längs I_R har vi $f(iy)=y^4+16+iy\left(y^4+1\right)=u+iv$

Vidare är $u>0,\quad v=0\Leftrightarrow y=0$. Och $\left|\frac{v}{y}\right|=\left|\frac{y\left(y^4+1\right)}{y^4+16}\right|\to\infty, |y|=R\to\infty$

Detta ger att $\lim_{R\to\infty}\Delta_{I_R}\arg(f(z))=\pi$

Således $\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_R}\arg(f(z))=5\pi+\pi=6\pi$

<u>Svar :</u> z^5+z^4+z+16 har 3 nollställen i den vänstra halvplanet.

Tal 6. Integrera $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{\left(z^2+9\right)^2}$ runt övre halvcirkeln

$\Gamma_R = C_R + I_R,\quad C_R = \{z = x+iy:\ x^2+y^2 = R^2,\ y>0\}.\ I_R = \{z = x+iy: y = 0, -R \le x \le R\}$
funktionen har en en pol av ordning 2 i punkten $z = 3i$ som ligger innanför Γ_R.

1. Residusatsen ger att

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z),3i]$$

$$\operatorname{Res}[f(z),3i] = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[(z-3i)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[(z-3i)^2\frac{ze^{iz}}{\left((z-3i)^2(z+3i)^2\right)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{(z+3i)^2\left(e^{iz}+ize^{iz}\right)-ze^{iz}\left(2(z+3i)\right)}{(z+3i)^4} = \frac{e^{-3}}{12}$$

<u>Delsvar:</u> $\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z),3i] = \dfrac{\pi i e^{-3}}{6}$.

2. $\lim\limits_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \dfrac{\pi i e^{-3}}{6}$

$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \max\limits_{z\in C_R}|f(z)|\pi R$. Men

$$|f(z)| = \left|\frac{ze^{iz}}{\left(z^2+9\right)^2}\right| = \frac{|z|\left|e^{i(x+iy)}\right|}{\left|z^2+9\right|^2} = \frac{|z|e^{-y}}{\left|z^2+9\right|^2} \le \frac{|z|e^{-y}}{\left||z|^2-9\right|^2} \le \frac{|z|}{\left||z|^2-9\right|^2},\quad \forall y>0$$

Således har vi

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{R}{\left(R^2-9\right)^2}\pi R \to 0,\quad R\to\infty$$

<u>Delsvar:</u> $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xe^{ix}}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \dfrac{\pi i e^{-3}}{6}$

<u>Svar:</u> $\int_{-8}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \dfrac{\pi e^{-3}}{6}$

alt.

$\int_{-8}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \{\text{ part. integration}\} = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+9}dx = \operatorname{Re}\left[\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{ix}}{x^2+9}dx\right]$ och sedan betrakta

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{e^{iz}}{\left(z^2+9\right)}$$

Tal 7. Vi har $f = u+iv$ som är en helfunktion. Då gäller att $g(z) = e^{f(z)}$ är också en hel funktion pga e^w är det. Nu är $|g(z)| = \left|e^{u+iv}\right| = e^u \le 1$, ty $u(x,y)<0\quad\forall\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$.Liouvilles sats (sats13 sid 194) ger att $g(z) = e^{f(z)}$ är konstant i $z-$planet. Detta implicera att $f(z)$ är konstant i $z-$planet.