

**Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201,
 Komplex analys för E,F och T,
 00–12–19, klockan 14–19.**

Tal 1. Låt $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$. Cauchy-Riemanns ekvationer ger

$$v'_y = u'_x = -2e^{2y} \sin 2x + 1 \implies v(x, y) = -e^{2y} \sin 2x + y + h(x)$$

$$u'_y = 2e^{2y} \cos 2x = -v'_x = 2e^{2y} \cos 2x - h'(x) \implies h(x) = k,$$

där k är en reell konstant. Därför

$$f(x + iy) = e^{2y} \cos 2x + x + i(-e^{2y} \sin 2x + y + k)$$

$$= e^{2y}(\cos 2x - i \sin 2x) + (x + iy) + ik = e^{2y}e^{-i2x} + z + ik.$$

Villkoren $f(0) = 1$ ger $k = 0$.

Svar: $f(z) = e^{-2iz} + z$.

Tal 2. Låt $S = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -1\}$ och betrakta domänen $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$. På Ω är $z^{1/2}$ en-entydig och analytisk funktion.

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi in)},$$

$$\sqrt{1} = 1 \implies n = 0 \implies z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\arg z)}.$$

Den gren som efterfrågas är

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\arg z)}.$$

den efterfrågade derivatan är

$$f'(z) = -\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

Låt $z = -i\pi^2/2$.

$$\sqrt{-i\pi^2/2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-i\pi^2/2)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln \frac{\pi^2}{2} - i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{1}{2}(2\ln \pi - \ln 2)} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (1 - i).$$

$$\sin \sqrt{z} = \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\pi}{2}(1-i)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(1-i)} \right) = \cosh \frac{\pi}{2}.$$

$$f'(-i\pi^2/2) = \frac{\cosh \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}(1-i)} = \frac{1+i}{\pi} \cosh \frac{\pi}{2}$$

Svar: $f'(-i\pi^2/2) = \frac{1}{\pi} \cosh \frac{\pi}{2} + \frac{i}{\pi} \cosh \frac{\pi}{2}$.

Tal 3. Vi använder den välkända serien

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1.$$

Vi har

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right).$$

Om $\left| \frac{1}{z-2} \right| < 1$, dvs $|z-2| > 1$, så har vi

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n}.$$

Om $\left| \frac{z-2}{3} \right| < 1$, dvs $|z-2| < 3$, så har vi

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n}.$$

Svar: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-2)^n$, där $c_n = \frac{1}{2}(-1)^{1+n}$, $n = -1, -2, -3, \dots$ och $c_n = \frac{1}{2}(-3)^{-(n+1)} (z-2)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

4. Låt

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})} dt.$$

Vi använder substitutionen $z = e^{it}$, $dt = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}$.

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + z^{-1})} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2 dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Funktionen $z^2 + 2az + 1$ har två nollställen $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ och p.g.a. $a > 1$, bara $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ ligger innanför $|z| = 1$.

Residusatsen ger att

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2 dz}{z^2 + 2az + 1}$$

$$= 2\pi \text{Res} \left[\frac{2}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Svar: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

Tal 5.

a. Ekvationen $ze^{a-z} = 1$ är ekvivalent med ekvationen $f(z) = z - e^{z-a} = 0$. Låt $g(z) = z$ och $h(z) = -e^{z-a}$. På cirkeln $|z| = 1$ har vi

$$|g(z)| = |z| = 1, \quad |h(z)| = |e^z| e^{-a} < e e^{-a} < 1, \quad a > 1.$$

Rouches sats ger då att $f(z)$ har lika många nollställen som $g(z)$ innanför cirkeln $|z| = 1$, dvs ett nollställe.

Svar a: Ekvationen $ze^{a-z} = 1$ har ett nollställe innanför $|z| = 1$.

b. Betrakta halvcirkeln med radie R som ligger i vänstra halvplanet $C_R = \gamma_R + I_R$, där $\gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Re} z < 0\}$ och $I_R = \{z : \operatorname{Re} z = 0, -R \leq \operatorname{Im} z \leq R\}$. På γ_R har vi

$$f(z) = z^5 + (1+i)z + 2 = z^5 \left(1 + \frac{1+i}{z^4} + \frac{2}{z^5}\right) = z^5(1 + p(z)).$$

Detta ger att $\arg(z^5(1 + p(z))) = 5\arg z + \arg(1 + p(z))$ och därför $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_R} f(z) = 5\pi$.

Längs I_R har vi $f(iy) = -y + 2 + iy(y^4 + 1) = u + iv$. $u(y) = 0 \implies y = 2$, $v(y) = 0 \implies y = 0$.

$$\frac{|v(y)|}{|u(y)|} = \frac{|y(y^4 + 1)|}{|2 - y|} \rightarrow \infty, \quad \text{då } y \rightarrow \infty.$$

Sedvanliga metoder (rita en figur) ger att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{I_R} \arg(f(z)) = \pi$$

.Således $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \arg(f(z)) = 6\pi$.

Svar b: Funktionen $z^5 + (1+i)z + 2$ har 3 nollställen i den vänstra halvplanet.

Tal 6. Låt $t \geq 0$ först. Vi integrerar $f(z) = \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}$ runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{z = x+iy : x^2 + y^2 = R, y > 0\}$, $I_R = \{z = x+iy : y = 0, -R \leq x \leq R\}$. Funktionen f har en pol av ordning 2 i punkten $z = i$ som ligger innanför Γ_R .

Residusatsen ger att

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 f(z) \right) =$$

$$2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2 e^{itz}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{ite^{itz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{itz}}{(z+i)^3} \right] = \frac{\pi}{2}(t+1)e^{-t}.$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = \frac{\pi}{2}(t+1)e^{-t}.$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_R} |f(z)| \pi R.$$

$$|f(z)| = \frac{|e^{itz}|}{|(z^2 + 1)^2|} = \frac{|e^{itx - ty}|}{|z^2 + 1|^2} \leq \frac{e^{-y}}{|z^2 - 1|^2} \leq \frac{1}{||z|^2 - 1|^2}, \quad y \geq 0.$$

Vi har

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2} \pi R \rightarrow 0, \quad \text{då } r \rightarrow \infty.$$

P.g.a. $\sin(tx)$ är en udda funktion

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}(t + 1)e^{-t}.$$

Integralen har samma värdet om man byter t mot $-t$ för att $\cos(tx) = \cos(-tx)$.

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}(|t| + 1)e^{-|t|}$ för alla reella t .

Tal 7. Om $|\zeta| = R$ då $|f(\zeta)| \leq M$ och har vi också att $|\zeta - z| > |\zeta| - |z| = R - |z|$, då $|z| < R$. Vi använder den generaliserade Cauchys integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

som ger

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{M}{|(\zeta - z)|^{n+1}} d\zeta \leq \frac{n! M}{2\pi (R - |z|)^{n+1}} 2\pi.$$

Alltså vi har visat att

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{(R - |z|)^{n+1}}.$$