KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN
Institutionen för matematik
Karim Daho, Ari laptev

Lösningsförslag till tentamenskrivning i 5B1201 Komplex analys för E, F och T, 2001-04-18, kl: 8.00-13:00

1.a. Antag att $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är komplext deriverbar i punkten $1+i$,

och att $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 1$. Ange $f'(1+i)$.

b. Bestäm alla analytiska funktioner vilkas imaginär del är $\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)\cos 2y$.

Lösning:

1a. $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$[C-R diff ekv]$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - i$

svar: $f'(1+i) = 1 - i$

1b. Sedvanliga metoder ger att $f(z) = i\left(e^{2z} + e^{-2z}\right) +$ konstant.

---

2. Bestäm de fyra första termerna i Taylorserier av funktionen

$f(z) = \frac{Log(1-z)}{1+z}$ omkring origo. Ange även konvergensområdet.

Lösning:

$g(z) = \frac{1}{1+z}$ är analytisk utom $z = -1$ och kan således taylorsutvecklas i $|z| < 1$.

$g(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$. $h(z) = Log(1-z)$ (som innebär principalgren av logaritmfunktion) är analytisk då $1-z$ är reell, icke-positiv, dvs utom då $z = x \geq 1$; speciellt innebär detta att $h(z)$ är analytisk i $|z| < 1$ och kan Taylorsutvecklas där:

$h(z) = Log(1-z) \qquad h'(z) = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. detta ger att

$h(z) = Log(1-z) = k - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$; $h(0) = Log(1) = 0$; och får att den kända Maclaurinserien

$Log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Nu är

$$\frac{Log(1-z)}{1+z} = \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} (-z)^m\right) = -\left(z + z^2/2 + z^3/3 + z^4/4 \quad\right)\left(1 - z + z^2 - z^3 - z^4 - \quad\right)$$

$$= -\left(z - z^2 + z^2/2 + z^3 - z^3/2 + z^3/3 - z^4 + z^4/2 - z^4/3 + z^4/4 + \quad\right) =$$

$$= -z + z^2/2 - 2z^3/3 + 7z^4/12 -$$

Svar: $\frac{Log(1-z)}{1+z} = -z + z^2/2 - 2z^3/3 + 7z^4/12 -$ då $|z| < 1$

---

3. Visa att $\left|\int_C e^z \sin z dz\right| \le 6\pi e^{3\sqrt{3}}$, där C är cirkeln $|z| = 3$.

<u>Lösning</u>

Enligt uppskattningsatsen gäller att $\left|\int_C e^z \sin z dz\right| \le \max_{z\ C} |e^z \sin z| 2\pi 3$. vi söker en övre uppskattning av $e^z \sin z$ på cirkeln $|z| = 3$.

$$e^z \sin z = e^z \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}}{2i} = \frac{e^{i(x-y)}\left(e^{x-y} - e^{x+y}\right)}{2i}.$$

Använd $|e^{\pm ia}| = |\cos a \pm i \sin a| = 1$,detta ger att $|e^{i(x-y)}| = 1$. vi får

$$|e^z \sin z| = \left|\frac{e^{i(x-y)}\left(e^{x-y} - e^{x+y}\right)}{2i}\right| \le \frac{|e^{i(x-y)}|\left(|e^{x-y}| + |e^{x+y}|\right)}{2} = \frac{e^{x-y} + e^{x+y}}{2}$$ .Detta skall uppskattas på cirkeln $|z| = 3$. $\Leftrightarrow$ $x = 3\cos t, y = 3\sin t$. vi får

$x + y = 3(\cos t + \sin t)$, $x - y = 3(\cos t - \sin t)$, $t{:}0 \to 2\pi$. Funktionen e^u är stängt växande då u $\mathbb{R}$. och därmed $x + y \le \max_{0 \le t \le 2\pi} 3(\cos t + \sin t) = 3\sqrt{2}$ och

$x - y \le \max_{0 \le t \le 2\pi} 3(\cos t - \sin t) = 3\sqrt{2}$: Vi får $|e^z \sin z| \le \frac{e^{x+y} + e^{x-y}}{2} \le \frac{e^{3\sqrt{2}} + e^{3\sqrt{2}}}{2} = e^{3\sqrt{2}}$

Vi har visat att $\left|\int_C e^z \sin z dz\right| \le 6\pi e^{3\sqrt{2}}$.

---

4. Beräkna integralen $\oint_C \frac{\tan z}{z^2 + z + 1} dz$, där C är rektangeln med hörn i punkterna : $\pm i/4, 6 \pm i/4$

<u>Lösning:</u>

Funktionen $f(z) = \frac{\tan z}{z^2 + z + 1} = \frac{\sin z}{\cos z\left(z^2 + z + 1\right)}$ har enkla poler då $\cos z = 0$ dvs $z = \pi/2 + k\pi, k$ $\mathbb{Z}$ och då $z^2 + z + 1 = 0$ $z = -1/2 \pm \sqrt{3/2}$. Enbart $z_1 = \pi/2$, $z_2 = 3\pi/2$ ligger innanför rektangeln C. Residusatsen ger

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2 + z + 1} dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}\left(f(z), \pi/2\right) + \mathrm{Res}\left(f(z), 3\pi/2\right)\}.$$ Men

$$\mathrm{Res}(f(z), \pi/2 + k\pi) = \left(\frac{\sin z}{z^2 + z + 1}\right) f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(\pi/2 + k\pi)}{h'(\pi/2 + k\pi)} = \frac{-1}{(\pi/2 + k\pi)^2 + (\pi/2 + k\pi) + 1}$$

Alltså

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2 + z + 1} dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}\left(f(z), \pi/2\right) + \mathrm{Res}\left(f(z), 3\pi/2\right)\} =$$

$$2\pi i\left(\frac{-1}{(\pi/2)^2 + \pi/2 + 1} + \frac{-1}{(3\pi/2)^2 + 3\pi/2 + 1}\right) = \frac{-2\pi i\left(5\pi^2/2 + 2\pi + 2\right)}{\left(\pi^2/4 + \pi/2 + 1\right)\left(9\pi^2/4 + 3\pi/2 + 1\right)}$$

Svar: $\oint_C \frac{\tan z}{z^2+z+1}dz = \frac{-2\pi i\left(5\pi^2/2+2\pi+2\right)}{\left(\pi^2/4+\pi/2+1\right)\left(9\pi^2/4+3\pi/2+1\right)}$

---

5. Hur många nollställen har polynomet $p(z)=z^5+4z^3+5z^2+10$
i första kvadranten?

Lösning:

Låt H(R)=C(R)+X(R) ?Y(R)vara en sluten och enkel kurvan i högrahalvplanet som är positivt orienterade, dvs moturs.Polynomet

$p(z)=z^5+4z^3+5z^2+10$

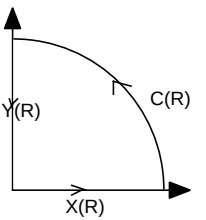
har 5 nollställen i det komplexa talplanet. Vi söker antalet nollställen i det första kvadranten

Enligt Argumentvariatonsprincipen har vi

$\Delta_{H(R)}\arg(f(z)=N_f$

där N_f är antalet nollställen till inuti H(R)

$f(z)=z^5+4z^3+5z^2+10$



Steg1: Sök $\lim_{R\to\infty}\Delta_{C(R)}\arg(f(z)$

$f(z)=z^5+4z^3+5z^2+10=z^5\left(1+\frac{4}{z^2}+\frac{5}{z^3}+\frac{10}{z^5}\right)=z^5\left(1+p(z)\right)$. Då är

$\arg(f(z))=\arg(z^5)+\arg(1+p(z))$. På grund av $|p(z)|\to 0$ då $R\to\infty$

då fås $\lim_{R\to\infty}\Delta_{C(R)}\arg(f(z)=5\pi/2$.

Steg2: Sök $\lim_{R\to\infty}\Delta_{I(R)}\arg(f(z)$

På Y(R) är $z=iy, y \quad \mathbb{R}$. Då fås

$f(iy)=(iy)^5+4(iy)^3+5(iy)^2+10=5(2-y^2)+iy^3\left(y^2-4\right)=u+iv$

dvs $u=5\left(2-y^2\right)$, $v=y^3\left(y^2-4\right)$ där y avtar från +R till 0 längs Y(R).

$u=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{2}$ och $v=0 \Leftrightarrow y=0, y=2$. detta gäller då $y:R\to 0$.

vi ritar i $w-$planet bilden av Y(R), dvs $f(Y(R))$ då $y:R\to 0$.

vi gör en tabell

Först observerar vi att $v(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$ och $u(0)=10, u(2)=-10$

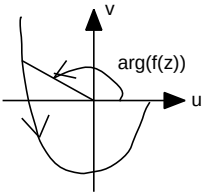
y	R	2	$\sqrt{2}$	0
u	$\approx -R^2$	-10	0	10
v	$\approx R^5$	0	$-4\sqrt{2}$	0

vidare är för stora

$$R \left|\frac{v(R)}{u(R)}\right| \approx \frac{R^5}{R^2} \to \infty \text{ då } R \to \infty$$

I följande skiss

$y{:}R \to 0$ och iR avbildas på $f(iR)$



$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{I(R)} \arg(f(z) = 3\pi/2$$

steg4:

Steg1+ steg2 +steg3

ger $\lim_{R\to\infty} \Delta_{C(R)+I(R)} \arg(f(z)) = \frac{5\pi + 3\pi}{2} = 4\pi$

Detta innebär att antalet nollställen i första kvadranten till

$f(z) = z^5 + 4z^3 + 5z^2 + 10$ är 2.

Svar: Antalet nollställen av

$f(z) = z^5 + 4z^3 + 5z^2 + 10$ i första kvadranten är 2

Steg3 Sök $\lim_{R\to\infty} \Delta_{I(R)} \arg(f(z)$

längs X(R).

På X(R) är

$f(x) = x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 10 \geq 10 > 0$

detta ger att $\lim_{R\to\infty} \Delta_{I(R)} \arg(f(z) = 0$

6. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

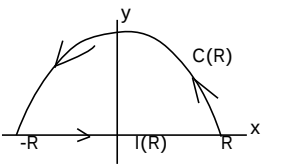
Lösning: Steg1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^2 + 2x^2 + 2} dx = \mathrm{Im}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx\right)$$

Betrakta $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$

och konturen som figuren visar orienterad i positiv riktning dvs moturs ,där

I(R)=[-R,R] och C(R)={$z = \mathrm{Re}^{i\theta}, \theta = 0 \to \theta$}



Kurvan I(R)+C(R) är sluten och enkel.

Funktionen $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$ har poler då

$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm \sqrt{1-2} \Leftrightarrow z = -1 \mp i$. Enbart den enkla polen $z = -1 + i$ ligger inuti kurvan I(R)+C(R) . Vi bestämmer residun i denna enkla polen via (se t.ex Wunsch sid 322)

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad \mathrm{Res}(f(z), -1+i) = \frac{g(-1+i)}{h'(-1+i)} = \frac{e^{-1}e^{-i}(-1+i)}{-2+2i+2} = \frac{(-1+i)e^{-1-i}}{2i}.$$

Residu satsen ger då att:

Delsvar: $\oint_{I(r)+C(R)} f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f(z), -1+i)] = \pi e^{-1}(-\cos 1 + \sin 1) + i\pi e^{-1}(\cos 1 + \sin 1)$.

Steg2.

2.1 $\lim_{R\to\infty}\int_{I(R)} f(z)dz = \left[\text{på } I(R) \text{ är } z = x\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2+2x+2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+2x+2}dx.$

2.2 Visa att $\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)} f(z)dz = 0.$

Här kan vi inte använda ML- olikheten (se t.ex Wunsch sid 156 formeln (4.2-16)

Men Jordans olikhet (sid 351) gäller. Vi använder $\left|\int_{C(R)} f(z)dz\right| \le \max_{|z|=R}|f(z)|\int_{C(R)}|e^{iz}||dz|.$

vidare är

$\max_{|z|=R}|f(z)| = \max_{|z|=R}\frac{|z|}{|z^2+2z+2|} < \max_{|z|=R}\frac{|z|}{|z|^2\left(1+\frac{2z+|}{z^2}\right)} = O\left(\frac{1}{R}\right).$ Men Jordansolikhet ger at

$\int_{C(R)}|e^{iz}||dz| < \pi$. Detta ger att $\left|\int_{C(R)} f(z)dz\right| \le \max_{|z|=R}|f(z)|\int_{C(R)}|e^{iz}||dz| = O\left(\frac{1}{R}\right)\pi \to 0$

Steg3. Vi sammanfattar från steg1+steg2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+2x+2}dx = \pi e^{-1}(-\cos 1+\sin 1) + i\pi e^{-1}(\cos 1+\sin 1)$$

Tag nu imaginära delen av vänstra och högra ledet av ovanstående likheten

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx = \pi e^{-1}(\cos 1+\sin 1) \approx 1{,}597$

---

7. Låt $0<\varepsilon<\sqrt{3}$, och låt C_ε vara den kavrtscirkel som går från $i\varepsilon$ till ε.

Beräkna $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\cos z}{z\left(z^2+3\right)^3}dz$

Lösning:

Sätt $f(z) = \frac{g(z)}{z}$, där $g(z) = \frac{\cos z}{\left(z^2+3\right)^3}$, så fås $f(z) = \frac{1}{z}\left(g(0)+g'(0)z+\quad\right) = \frac{g(0)}{z} + O(1),$

där $g(0) = 1/9$. Vidare, uppsakattningssatsen ger $\left|\int_{C_\varepsilon} O(1)dz\right| \le O(1)\frac{\pi\varepsilon}{2} \to 0,\ \ \varepsilon\to 0.$

Och $\int_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z} = \left[z = e^{i\theta}, \theta: 0\to\pi/2\right]\int_{\pi/2}^{0}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = -i\int_0^{\pi/2}d\theta = -i\pi/2$ .Således

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\left(\frac{g(0)}{z} + O(1)\right)dz = \frac{-i\pi}{2}g(0) = \frac{-i\pi}{18}.$

Svar $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\cos z}{z\left(z^2+3\right)^3}dz = \frac{-i\pi}{18}$