Institutionen för Matematik
KTH

Karim Daho

Lösningsförslag till
Tentamensskrivning i 5B1201 Komplex analys för E, F och T,
2000-09-01, kl:8:00-13:00

- **INGA HJÄLPMEDEL**
- Tentamen ger maximalt 35 poäng. Så med bonus inräknad kan man totalt få 35+4=39p
- **Betygsgränser**:16-21p ger betyget 3, 22-27p ger betyget 4, och 28-39 p ger betyget 5.
- **OBS!** Lösningarna ska åtföljas av förklarande text och/eller figurer. Alla räkningar ska motiveras. Om du använder dig av en viss sats, så ska förutsättningarna för denna klart anges.

---

1 . a) För vilka z är följande funktioner

$f(z) = x^2y + ixy^2$, $g(z) = \frac{x}{y} + i\frac{y}{x}$ är analytiska? (2p)

b) Bestäm den analytiska funktionen f i $\Omega = \{z \quad \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \quad \}$ vars realdel är $2\arctan(\frac{y}{x})$ och som satisfierar $f(1) = 0$.

Svaret skall anges som en funktion av enbart $z = x + iy$. (3p)

<u>Lösning.</u>

<u>a)</u>Vi använder satsen :

$$f = u + iv \text{ är analytisk i } \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ u \,\&\, v \quad C^1(\Omega) \\ 2.\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ i } \Omega \end{cases}$$

Då $f(z) = x^2y + ixy^2 = u + iv$ $\begin{cases} u_x = v_y \Leftrightarrow 2xy = 2xy \text{ vilket gäller för alla } z \\ u_y = -v_x \Leftrightarrow x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ och

$f(z) = x^2y + ixy^2$ är deriverbar i $z \Leftrightarrow z = 0$. Således är f ej analytisk någonstans.

Då $g(z) = \frac{x}{y} + i\frac{y}{x} = u + iv$ $\begin{cases} u_x = v_y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \text{x = y utanför (0,0)} \\ u_y = -v_x \Leftrightarrow \frac{-x}{y^2} = \frac{y}{x^2} \Leftrightarrow y^3 = -x^3 \text{utanför (0,0)} \end{cases}$

detta ger att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda enbart i origo som inte ligger i definitionsmängden av g.

$g(z) = \frac{x}{y} + i\frac{y}{x}$ är inte deriverbar i någon punkt .Således är g ej analytisk någonstans

Svar: f och g ej analytiska någonstans

b) Då $M = \{z = x + iy : -\pi < \arg(z) < \pi\}$ är $Log z = Log|z| + i\arg(z)$ en analytisk funktion.
Då är även $f(z) = -2iLog z = 2\arg(z) - 2iLog|z|$, där

$\mathrm{Re}[-2iLog z] = 2\arg z = 2\arctan\frac{y}{x}$ i $\Omega = \{z = x + iy \ : x > 0\}$

som uppfyller $f(1) = 0$

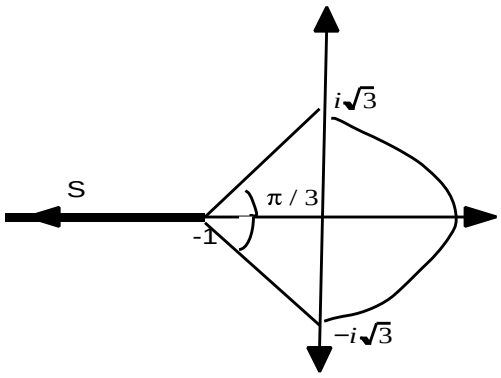
$\boxed{\text{svar: } f(z) = -2iLog z \quad \text{i} \quad \mathrm{Re}(z) > 0}$

---

2 . Låt L vara halvcirkelbågen i högra halvplanet från $-i\sqrt{3}$ till $i\sqrt{3}$.

Beräkna kurvintegralen $\int_L \frac{1}{z+1}\,dz$. (4p)

Lösning. I den enkla domänen



$\Omega = \mathbb{C} \setminus S = \{z = x + iy : -\pi < \arg(z+1) < \pi\}$, där $S = \{z = x + iy : -\infty < x < -1\}$

har $\frac{1}{1+z}$ en analytisk primitiv funktion $Log(z+1)$ (enligt t.ex sats 6 i Wunsch).

Detta ger att

$$\int_L \frac{1}{z+1}\,dz = \left[Log(1+z)\right]_{-i\sqrt{3}}^{i\sqrt{3}} = \left[Log|1+z| + i\arg(1+z)\right]_{-i\sqrt{3}}^{i\sqrt{3}} =$$

$$= i\left\{\arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1-i\sqrt{3})\right\} = i\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}i$$

$\boxed{\text{svar: } \int_L \frac{1}{z+1}\,dz = \frac{2\pi}{3}i}$

---

3. Vi vill utveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ i en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2i)^n$,

konvergent i området $\Omega_{R_1,R_2} = \{z \quad \mathbb{C} : R_1 < |z-2i| < R_2$ så att $0 \quad \Omega_{R_1,R_2}$.

a) Finn det största området Ω_{R_1,R_2} . (1p)

b) Bestäm koefficienterna i Laurentserien. (3p)

c) Kontrollera ditt resultat genom att sätta in $z = 0$ i ditt svar. (1p

Lösning.

a) Singulära punkter för $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ är i och $-i$ avståndet dit från $2i$ är 1 resp 3. Avståndet till origo är >1 och <3. Alltså måste området vara

$$\boxed{\text{Svar}=\Omega_{R_1,R_2} = \{z = x+iy : 1 < |z-2i| < 3\}. \quad \text{(Rita en figur)}}$$

b) Vi har $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2i(z-i)} - \dfrac{1}{2i(z+i)} = [w = z-2i] = \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{w+i} - \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{w+3i} =$

$= \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{w}\dfrac{1}{1+\frac{i}{w}} - \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{3i}\dfrac{1}{1+\frac{w}{3i}} =$ i området $1 < |w| < 3$ gäller $\left|\dfrac{i}{w}\right| < 1$ och $\left|\dfrac{w}{3i}\right| < 1$ $=$

$= \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{i}{w}\right)^k + \dfrac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{w}{3i}\right)^k = [\text{byt } k \to -1-n] =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}i^n w^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3i}\right)^n w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2i)^n$$

$$\text{med } a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}i^n & (n<0) \\ \frac{1}{6}\left(\frac{i}{3}\right)^n & (n \geq 0) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Svar: } \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2i)^n \text{ med } a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}i^n & (n<0) \\ \frac{1}{6}\left(\frac{i}{3}\right)^n & (n \geq 0) \end{cases}}$$

c) för $z = 0$ fås $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(-2i)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}(i)^n(-2i)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{i}{3}\right)^n(-2i)^n =$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n + \dfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = [\text{ geometriska serier}] = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1 = f(0).$

---

4. Låt $f(z) = \dfrac{z^2 e^{i\omega z}}{z^4+4}$ där ω är reell parameter.

(a) Visa att $\pm 1 \pm i$ är enkla poler till $f(z)$. (1p)

(b) Integrera $f(z)$ längs en lämplig kontur för att beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\cos(\omega x)dx \qquad \omega \quad \mathbb{R} \qquad \text{(5p)}$$

Lösning.

(a) $z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4 \Leftrightarrow z^4=4e^{i(\pi+2k\pi)}$**,** detta ger $z_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ $k=0,1,2,3$

vi får då

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i,\quad z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=-1+i,\quad z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}=-1-i,\quad z_3=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+3\frac{\pi}{2}\right)}=1-i$$

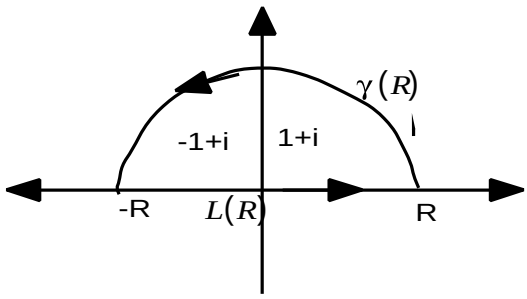
(b) Integrera $f(z)$ längs en lämplig kontur för att beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\cos(\omega x)dx \qquad \omega \quad \mathbb{R}.$$

Sätt $I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\cos(\omega x)dx$, då är $I(\omega)=I(-\omega)$

låt $\omega\geq 0$, $I(\omega)=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}e^{i\omega x}dx\right\}$. Betrakta konturen $C(R)=\gamma(R)+I(R)$ som är en halvcirkel som ligger i övrehalvplanet, där $\gamma(R)$ är halvcirkeln med radie R och $I(R)$ är

Betrakta konturen $C(R)=\gamma(R)+I(R)$ som är en halvcirkel som ligger i övrehalvplanet, där $\gamma(R)$ är halvcirkeln med radie R och $I(R)$ är linjestyket från $-R$ till R (se figuren).



$f(z)=\frac{z^2}{z^4+4}e^{i\omega z}$. Vi observerar att endast $-1+i$, $1+i$ ligger innanför konturen $C(R)$. Residusatsen ger

$$\oint_{C(R)} f(z)dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left(f(z),1+i\right)+\mathrm{Res}\left(f(z),-1+i\right)\right\}=$$

$$=2\pi i\left\{\left.\frac{e^{i\omega z}}{4z}\right|_{z=1+i}+\left.\frac{e^{i\omega z}}{4z}\right|_{z=-1+i}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-\omega}(\cos\omega-\sin\omega)$$

$$\left|\oint_{\gamma(R)} f(z)dz\leq\left[\text{uppskattnings saten(ML)}\right]\right|\leq\max_{z\ \gamma(R)}|f(z)|\pi R\leq\max_{z\ \gamma(R)}\frac{R^2e^{-\omega y}}{R^4-4}\pi R\leq M\frac{1}{R}$$

$$\oint_{\gamma(R)} f(z)dz=O\left(\frac{1}{R}\right)$$

Vi får

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma(R)} f(z)dz+\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=\frac{\pi}{2}e^{-\omega}(\cos\omega-\sin\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}e^{i\omega x}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\omega}(\cos\omega-\sin\omega)$$

Enligt ovan har vi då

$$\omega \ge 0,\quad I(\omega) = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4} e^{i\omega x} dx\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4} e^{i\omega x} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\omega}(\cos\omega - \sin\omega),$$

För $\omega \le 0$, ger $I(-\omega) = I(\omega)$, $\quad I(-\omega) = \frac{\pi}{2}(\cos\omega + \sin\omega)$

SVAR:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4} \cos\omega\, x\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\omega}(\cos\omega + |\sin\omega|)$$

---

5. **a)** Bestäm antalet nollställen till $f(z) = \dfrac{ze^{iz} - 4}{z-3}$ innanför enhetscirkeln. (2p)

b) Bestäm antalet nollställen till $P(z) = z^5 + z - 1$ i vänstra halvplanet. (4p)

<u>Lösning.</u>

a) $z - 3$ saknar nollställen innanför enhetscirkeln . Detta ger att antantalet nollställen till $f(z) = \dfrac{ze^{iz} - 4}{z-3}$ innanför enhetscirkeln ges av $p(z) = ze^{iz} - 4$ innanför enhetscirkeln.

Sätt $p(z) = g(z) + h(z)$, där $g(z) = ze^{iz}$, $\quad h(z) = -4$.

Nu är $|h(z)| = |-4| = 4$, medan $|g(z)| = |ze^{iz}| = |z||e^{iz}| = |z|e^{-y} \le 1$ på enhetscirkeln. $|z| = 1$

Således fås att $|h(z)| > |g(z)|$ för alla z på enhetscirkeln. $|z| = 1$.

Rouches sats ger att attantalet nollställen till $p(z) = ze^{iz} - 4$ innanför enhetscirkeln är lika med antalet nollställen till $h(z) = -4$ dvs inga.

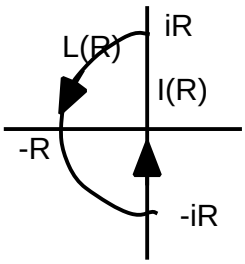
Svar : $f(z) = \dfrac{ze^{iz} - 4}{z-3}$ saknar nollställen innanför enhetscirkeln.

b) Bestäm antalet nollställen till $P(z) = z^5 + z - 1$ i vänstra halvplanet.

Vi tillämpar argumentprincipen på den Enkelsluten kurvan $C(R) = L(R) + I(R)$

Vi observera att $P(z) = z^5 + z - 1$ har 5 nollställe i $\mathbb{C}$-planet.

$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta_{C(R)}[\arg(p(z)] =$ antalet nollställe till $P(z) = z^5 + z - 1$ I vänstra halvplanet.



<u>Steg1 Studera</u> $\arg(P(z))$ längs $L(R)$

$$\Delta_{L(R)} \arg(P(z) = \Delta_{L(R)} \arg(z^5 + z - 1) = \qquad \Delta_{L(R)} \arg\left(z^5\left(1 + \frac{z-1}{z^5}\right)\right) =$$

$$= \Delta_{L(R)} \arg[z^5(1 + q(z))]$$

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{L(R)} \arg(P(z) = \lim_{R\to\infty} \Delta_{L(R)} \arg(z^5) + \lim_{R\to\infty} \Delta_{L(R)} \arg(q(z)$$

Men

$$\left|q(z)\right| = \left|\frac{z-1}{z^5}\right| \le \frac{1}{|z|^4} + \frac{5}{|z|^5} \to 0,\ R \to \infty \text{ ger } \lim_{R\to\infty} \Delta_{L(R)} \arg(q(z) = 0$$

<u>Delsvar:</u> $\lim_{R\to\infty} \Delta_{L(R)} \arg(P(z) = 5\pi$

<u>Steg 2: Studera</u> $\arg(P(z))$ längs $I(R)$.
På $I(R)$ är $z = iy$ och då fås
$P(iy) = -1 + i\left(y + y^5\right) = u + iv,$ där

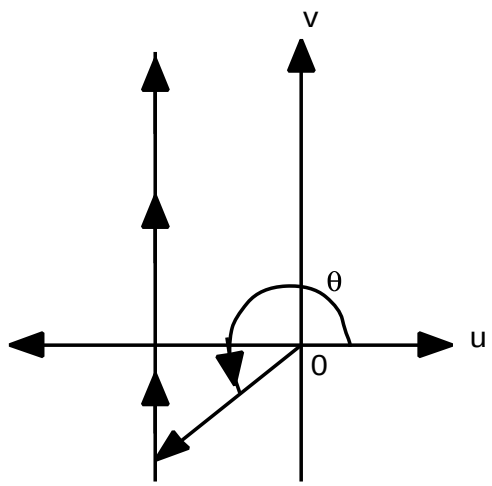
$$\begin{cases} u = -1 \\ v = y^5 + y \end{cases} \quad y: -R \to R.$$ Då har vi följande tabell:

y :	$-R$		0		R
u	-1	-	-1	-	-1
v	$\approx -R^5$	-	0	+	$\approx R^5$

$\arg(P(iy) = \theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$

$\left|\frac{v}{u}\right| = R^5 \to \infty$, då $R \to \infty$. Vi får följande

<u>Delsvar</u>: $\lim_{R\to\infty} \Delta_{I(R)}\left[\arg(p(z)\right] = -\pi$

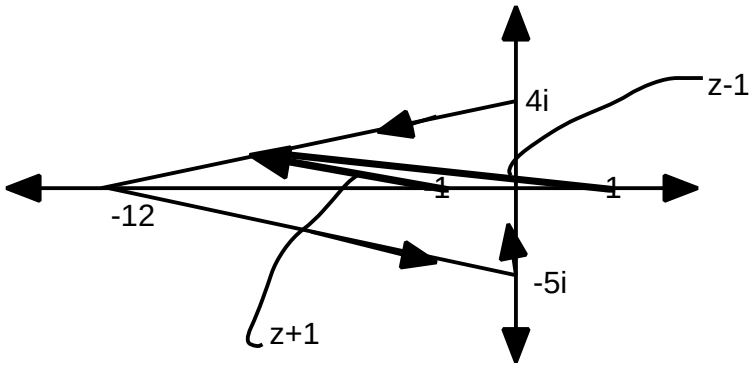


<u>Svar</u>: $\lim_{R\to\infty} \Delta_{C(R)}\left[\arg(p(z)\right] = 5\pi - \pi = 4\pi$. Dvs $z^5 + z - 1$ har 2 nollställe I vänstra halvplanet

---

6. Börja att med att ge $w = \log\frac{z-1}{z+1}$ värdet $i\pi$ för $z = 0$.Betrakta triangeln med hörn i punkterna $4i, -12$ och $-5i$. Vilket slutvärde får w om z (med början i $z = 0$) får genomlöpa triangeln ett varv i positiv riktning? (4p)

Lösning: Vi betecknar tringeln med T



$$w = \log\left(\frac{z-1}{1+z}\right) = \log(z-1) - \log(1+z) = \ln|z-1| + i\arg(z-1) - \left(\ln|1+z| + i\arg(1+z)\right).$$

$w(0) = i\pi$ (enligt texten).

$$\Delta_T w(z) = \Delta_T\left(\log(z-1)\right) - \Delta_T\left(\log(z+1)\right)$$

Den givna triangeln T omsluter $z = -1$, men inte $z = 1$.
Däför är $\Delta_T \arg(z-1) = 0$ dvs $\Delta_T(\log(z-1)) = 0$ Däremot är
$\Delta_T \arg(z+1) = 2\pi$ dvs $\Delta_T\left(\log(1+z)\right) = 2\pi i$

$\boxed{\text{Svaret blir } -2\pi i + \pi i = -\pi i}$

---

c) Låt funktionen $f(z)$ vara analytisk i en domän Ω. Visa att

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2 \text{ i } \Omega. \qquad \text{(5p)}$$

Lösning:
I denna uppgift ska man använda följande välkänd sats.
om $f = u + iv$ är analytisk i en domän Ω $\quad \Delta u = 0, \Delta v = 0$ i Ω.

$$f = u + iv \qquad |f|^2 = u^2 + v^2 \qquad \frac{\partial}{\partial x}|f|^2 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}|f|^2 = 2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}$$

Analogt fås $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f|^2 = 2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}$. Detta ger att $\Delta|f|^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}|f|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f|^2 =$

$$= 2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\Delta u + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\Delta v\right\} = \{\Delta u = 0, \Delta v = 0\} =$$

$$= 4\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} = 4\left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 = 4|f'(z)|^2.$$