KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
Institutionen för matematik
Karim daho

Lösningsförslag till
Tentamenskrivning på kursen 5B1201
komplex analys för E,F,T
Måndagen den 25 oktober 1999 kl 8^{00}-13^{00}.

---

1. Låt $u(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + x + 1$.
Finns det någon analytisk funktion $f(z)$ sådan att $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$ och $f(1) = 2$?
Bestäm i så fall $f(z)$ uttryckt som en funtion av enbart z. (4p)

Lösning:

a) Funktionen $u(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + x + 1$ är en C^∞ funktion för alla (x,y) $\mathbb{R}^2$. Vidare är

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) = 0 \text{ för alla } (x,y) \quad \mathbb{R}^2.$$

Detta innebar att u är harmonisk i den enkla domänen $\mathbb{R}^2$. Enligt sats 7 sid 74 i kursboken (Wunsch),finns då en analytisk funktion $f = u + iv$ så att $\operatorname{Re}[f(x+iy)] = u(x,y)$.

b) Sök $f = u + iv$ med $f(1) = 2$.

Det finns minst tre olika metoder. Här ett förslag grundat på identitetes satsen för analytiska funktioner (se Wunsch. sats16,sid 241 och 281).
Enligt Cauchy-Riemanns ekvationer är

$$f'(z) = u_x(x,y) + iu_x(x,y) =$$
$$= 12x^2y - 4y^3 + 1 - i\left(4x^3 - 12xy^2\right) \qquad (1)$$

I relation (1) , sätt in $y = 0$, och få

$$f'(x) = 1 - i4x^3 \qquad (2)$$

I relation (2), sätt in $x = z$

$$f'(z) = 1 - 4iz^3 \qquad (3)$$

Vi kontrollera att $1 - i4(x+iy)^3 = 12x^2y - 4y^3 + 1 - i\left(4x^3 - 12xy^2\right)$.

Integrera relation (3) och får

$$f(z) = -iz^4 + z + c.$$

Finn c via $f(1) = 2$. Detta ger att $f(1) = -i + 1 + c = 2 \qquad c = 1 + i$

Svar: $\begin{cases} f(z) = -iz^4 + z + 1 + i \\ f(1) = 2 \end{cases}$

2. Betrakta de flertydiga (mångtydiga) funktionerna $f_1(z) = z^{\frac{1}{2}}$ och $f_2(z) = i\log z$.
och låt $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

(a) Bestäm samtliga värden av $f(-1)$. (2p)

(b) Låt $g(z)$ vara den gren av $f(z)$, definierad på det längs negativa imaginäraxeln uppsurna komplex talplanet för vilken $g(-1) = \pi - i$.
Beräkna $g(2i)$ på formen $a + ib$. (3p)

<u>Lösning:</u> De flertydiga (mångtydiga) funktionerna $f_1(z) = z^{\frac{1}{2}}$ och $f_2(z) = i\log z$

kan skrivas $f_1(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi k)}$ och $f_2(z) = i\left[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)\right]$, där $k, n \quad \mathbb{Z}$.

Vi kan då skriva f som

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi k)} + i\left[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)\right], \text{ där } k, n \quad \mathbb{Z}.$$

Då får vi att

$$f(-1) = \sqrt{|-1|}e^{\frac{i}{2}(\arg(-1) + 2\pi k)} + i\left[\ln|-1| + i(\arg(-1) + 2\pi n)\right] = \pm i - (2n+1)\pi.$$

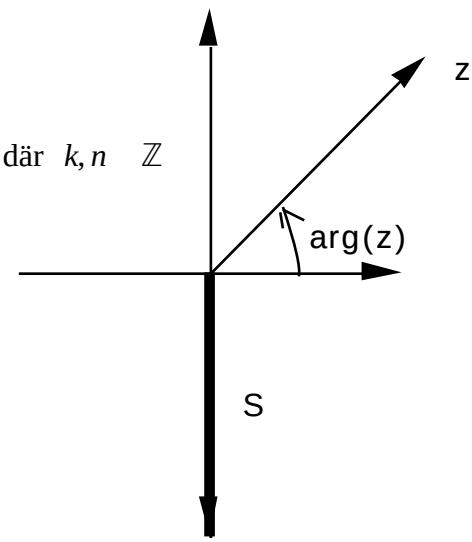
<u>Delsvar för (a):</u> $f(-1) = \pm i - (2n+1)\pi, \quad n \quad \mathbb{Z}$

i den enkla domänen

$$\Omega = \left\{ z: -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \right\}$$ kan

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi k)} + i\left[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)\right], \text{ där } k, n \quad \mathbb{Z}$$

definieras som en entydig analytisk funktion $g(z)$ för vilken $g(-1) = \pi - i$..



Dvs bestäm k och n så att $g(-1) = f(-1) = \pi - i$.

Ur (a) hade vi funnit

$f(-1) = \pm i - (2n+1)\pi, \quad n \quad \mathbb{Z}$, som flertydig funktion. således

$$f(-1) = \pm i - (2n+1)\pi = g(-1) = \pi - i.$$

Detta är sant då $n = -1$ och $(-)$ tecken väljs framför i.

Således den gren $g(z)$ av den flertydiga funktionen $f(z)$ ges av

$$g(z) = -\sqrt{|z|}e^{\frac{i\arg(z)}{2}} + i\left[\ln|z| + i(\arg z - 2\pi)\right]$$

$$g(-1) = \pi - i$$

Nu kan vi ta fram $g(2i)$ på formen $a + ib$.

$$g(2i) = -\sqrt{|2i|}e^{\frac{i\arg(2i)}{2}} + i\left[\ln|2i| + i(\arg(2i) - 2\pi)\right] = -\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} + i\left(\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right)\right) =$$

$$= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi - \frac{\pi}{2} + i\ln 2 = \frac{3\pi}{2} - 1 + i(\ln 2 - 1)$$

<u>Svar:</u> $g(2i) = \frac{3\pi}{2} - 1 - i(1 - \ln 2)$

3. Låt $f(z) = \dfrac{1}{2+z-z^2}$

(a) Utveckla funktionen $f(z)$ i en Taylorserie i området $\Omega_1 = \{z:\ |z| < 1\}$. (2p)

(b) Utveckla funktionen $f(z)$ i en Laurentserie i området $\Omega_2 = \{z:\ 1 < |z| < 2\}$. (2p)

Lösning:

Vi partialbråkuppdelar $f(z) = \dfrac{1}{2+z-z^2} = \dfrac{1}{(z+1)(2-z)} = \dfrac{1}{1+z} + \dfrac{1}{2-z}$

Funktionen har poler i $z = -1$ och $z = 2$

Vi använder den välbekanta geometriska serien $\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \dfrac{a}{1-z}$ då $|z| < 1$ ( )

Vi tillämpar (*) på

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{då } |z| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} \quad \text{då } |z| > 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{då } |z| < 2 \quad (3)$$

Vi får från (1) och (3) att

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] z^n \text{ som gäller då } |z| < 1$$

och från (2) och (3) att

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \text{ som gäller för } 1 < |z| < 2.$$

Svar

(a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] z^n$ som gäller då $|z| < 1$

(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ som gäller för $1 < |z| < 2$

---

4. Låt T vara den triangeln i z-planet med hörn i punkterna -1 och $3 \pm 2i$. Funktionen

$$w = \frac{z^5 - 4z^4 + 5z^3}{z^3 - z^2 + 4z - 4}$$

avbildar T på en sluten kurvan C i w-planet.
Antag att punkten z genomlöper T ett varv i positiv riktning (dvs moturs).
Hur många varv i positiv riktning kommer bildpunkten $w(z)$ på kurvan C går runt runt origo i w-planet? (4p)

Lösning: Vi tillämpar argumentvariationsprincipen(se Wunsch sats 6 sid458) Låt f vara analytisk på och inuti triangeln T utom i ett ändligt antal poler inuti T. Vidare låt $f(z) \neq 0,\ z \quad T$, och att f har ändligt många nollställen inuti T. Då gäller att

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_T \arg(f(z)) = N - P$$

Där P är antalet poler och N antalet nollställen innanför T, alla räknade så många gånger som deras ordning anger.

$\Leftrightarrow \begin{cases} N = \text{antalet varv i postiv riktning som bildkurvan C rotetar kring0 i } w-\text{planet} \\ (-)\ P = \text{ plus antalet varv i negativ riktning som bildkurvan C rotetar kring0 i } w-\text{planet} \end{cases}$

Här $f(z) = \dfrac{z^5 - 4z^4 + 5z^3}{z^3 - z^2 + 4z - 4}$. Antalet nollställen ges av

$z^5 - 4z^4 + 5z^3 = 0 \Leftrightarrow z^3\left(z^2 - 4z + 5\right) = 0 \Leftrightarrow z = 0,\quad z = 2 \pm i$ som alla 5 ligger inuti triangeln T.

Antalet poler ges av $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+4) = 0 \Leftrightarrow z = 1,\ z = \mp 2i$

Som synes ligger enbart $z = 1$ inuti T.

Vi har då $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_T \arg(f(z)) = N - P$ =5-1=4 och detta innebär geometriskt att

när punkten z genomlöper T ett varv i positiv riktning (dvs moturs),så kommer bildpunkten $w(z)$ på kurvan C dvs $\left(f(T)\right)$ att rotera 4 varv i positiv riktning runt origo i w-planet.

---

5. Låt $f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$.

(a) Bestäm antalet nollställen till $f(z)$ i vänstra halvplanet $= \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$. (4p)

(b) Undersök om alla nollställen till $f(z)$ ligger inom cirkeln $|z| = 2$. (2p)

<u>Lösning:</u>

(a)

Låt H(R)=C(R)+I(R) vara en sluten och enkel kurvan i högrahalvplanet som är positivt orienterade, dvs moturs.Polynomet

$f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$

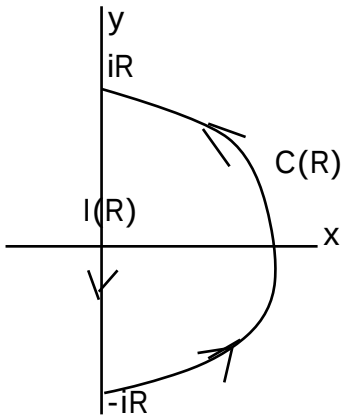
har 5 nollställen i det komplexa talplanet. Vi söker antalet nollställen i det högra halvplanet.

Enligt Argumentvariatonsprincipen har vi

$\Delta_{H(R)} \arg(f(z) = N_f$

där N_f är antalet nollställen

till $f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$ inuti H(R)



<u>Steg1:</u> Sök $\lim\limits_{R\to\infty} \Delta_{C(R)} \arg(f(z)$

$$f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1 = z^5\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right) = z^5\left(1 + p(z)\right).$$ Då är

$\arg(f(z)) = \arg(z^5) + \arg(1 + p(z))$ .På grund av $|p(z)| \to 0$ då $R \to \infty$

då fås $\lim\limits_{R\to\infty} \Delta_{C(R)} \arg(f(z) = 5\pi$.

<u>Steg2:</u> Sök $\lim\limits_{R\to\infty} \Delta_{I(R)} \arg(f(z)$

På I(R) är $z = iy, y \quad \mathbb{R}$. Då fås

$f(iy) = (iy)^5 + (iy)^3 + 4(iy)^2 + 1 = 1 - 4y^2 + i(y^5 - y^3) = u + iv$

dvs $u = 1 - 4y^2,\quad v = y^5 - y^3$ där y avtar från +R till -R längs I(R).

$u = 0 \Leftrightarrow y = \mp 1/\ 2$ och $v = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = \mp 1$.

vi ritar i $w-$planet bilden av I(R), dvs $f(I(R))$ då $y\colon R \to -R$.

vi gör en tabell

Först observerar vi att $v(\frac{\pm 1}{2}) = \mp\frac{3}{32}$ och $u(0) = 1, u(\pm 1) = -3$

y	-R		-1		-1/2		0		1/2		1		R
u	$\approx -R^2$	$-$	-3	$-$	0	+	+	+	0	$-$	-3	$-$	$\approx -R^2$
v	$\approx -R^5$	$-$	0	+	3/32	+	0	$-$	-3/32	$-$	0	+	$\approx R^5$

vidare är för stora

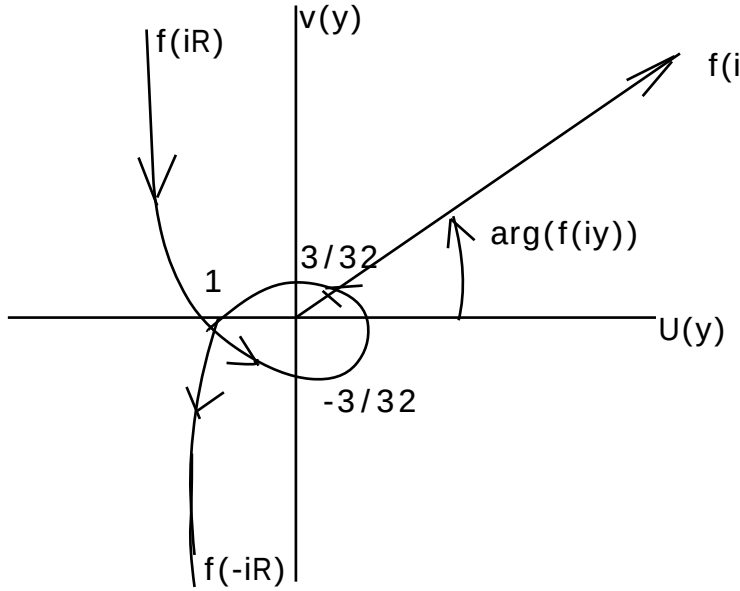
$R \left|\frac{v(R)}{u(R)}\right| \approx \frac{R^5}{R^2} \to \infty$ då $R \to \infty$

I följande skiss

$y: R \to -R$ och iR avbildas på $f(iR)$

medan $-iR$ avbildas på $f(-iR)$

$\lim_{R\to\infty} \Delta_{I(R)} \arg(f(z) = 2\pi + \pi = 3\pi$



steg3:

Steg1+ steg2

ger $\lim_{R\to\infty} \Delta_{C(R)+I(R)} \arg(f(z)) = 5\pi + 3\pi = 8\pi$

Detta innebär att antalet nollställen i högra halvplanet till

$f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$ är 4.

SVAR: Antalet nollställen av

$f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$ i vänstra halvplanet är

5-4=1

(b) För att undersöka om alla nollställen ligger inom cirkeln $|z| = 2$ använder vi Rouches sats.

$f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1 = F(z) + G(z)$ med $F(z) = z^5$ och $G(z) = z^3 + 4z^2 + 1$. Vi får

$|F(z)| = |z|^5 = [\text{på cirkeln } |z| = 2] = 32$. med hjälp av triangelolikheten (se Wunsch sid 26) fås

$|z|^3 - 4|z|^2 - 1 \le |G(z)| \le |z|^3 + 4|z|^2 + 1$. Detta ger på cirkeln $|z| = 2$

$8 - 8 - 1 \le |G(z)| \le 8 + 8 + 1 = 17$

Vi har visat att $|F(z)| > |G(z)| \qquad |z| = 2$

Rouches satsen ger nu att $f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$ har lika många nollställen inom $|z| = 2$ som $F(z) = z^5$ dvs 5.

SVAR: alla nollställen till $f(z) = z^5 + z^3 + 4z^2 + 1$ ligger inom cirkeln $|z| = 2$.

6. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

(5p)

Lösning: Steg1

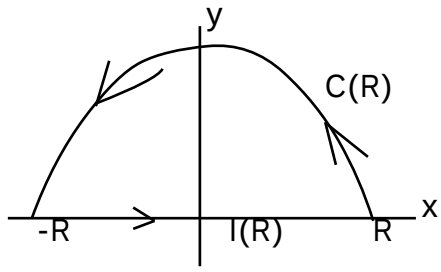
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^4+5x^2+4}\,dx\right)$$

Betrakta $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4+5z^2+4}$

och konturen som figuren visar orienterad i positiv riktning dvs moturs ,där

I(R)=[-R,R] och C(R)=$\{z = \mathrm{R}e^{i\theta}, \theta = 0 \to \theta\}$

Kurvan I(R)+C(R) är sluten och enkel.



Funktionen $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4+5z^2+4}$ har poler då

$z^4+5z^2+4 = 0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2+4) = \Leftrightarrow z = \mp i$ eller $z = \mp 2i$. Enbart de enkla polerna $z = i$ och $z = 2i$ ligger inuti kurvan I(R)+C(R) . Vi bestämmer residun i dessa enkla poler via (se t.ex Wunsch sid 322)

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4+5z^2+4} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

$$\operatorname{Re}s(f(z),i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{-1}}{6} \text{ och } \operatorname{Re}s(f(z),2i) = \frac{g(2i)}{h'(2i)} = \frac{e^{-2}}{-6}.$$

Residu satsen ger då att:

Delsvar: $\oint_{I(r)+C(R)} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname{Re}s(f(z),i) + \operatorname{Re}s(f(z),2i)\right] = 2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{6}\right) = \frac{i\pi}{3}e^{-1}\left[1-e^{-1}\right]$.

Steg2.

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{I(R)+C(R)} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C(R)} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int_{I(r)} f(z)dz == \frac{i\pi}{3}e^{-1}\left[1-e^{-1}\right].$$

2.1 $\lim_{R\to\infty}\int_{I(R)} f(z)dz = \left[\text{på } I(R) \text{ är } z = x\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

2.2 Visa att $\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)} f(z)dz = 0.$

Vi kan använda antingen ML- olikheten (se t.ex Wunsch sid 156 formeln (4.2-16) eller Jordans olikhet (sid 351) . Vi använder ML-olikheten.

(a) $\left|e^{iz}\right| = e^{\operatorname{Re}(iz)} = e^{-y} \qquad e^{-y} \le 1$ för stora $y > 0$.

(b) I följande uppskattning används triangeln-olikheten från Wunsch sid 26 och resultatet från (a)

$$\left|\frac{ze^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right| = \left|\frac{ze^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right| = \frac{|z|\left|e^{iz}\right|}{\left|z^4+5z^2+4\right|} \le \frac{|z|}{\left|z^4+5z^2+4\right|} \le \frac{|z|}{|z|^4-5|z|^2-4} = \frac{R}{R^4-5R^2-4}$$

.

$$\left|\int_{C(R)} f(z)dz\right| \le \max_{|z|=R}|f(z)|\pi R \le \frac{R}{R^4-5R^2-4}\pi R \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

Steg3. Vi sammanfattar från steg1+steg2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{i\pi}{3}e^{-1}\left[1-e^{-1}\right]$$

Tag nu imaginära delen av vänstra och högra ledet av ovanstående likheten

SVAR: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{3}e^{-1}\left[1-e^{-1}\right]$

---

7. Avgör om någon av följande funktioner

(a) $f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ (b) $g(z) = z^2\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$

har en primitiv funtion i domänen $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(4p)

Lösning:

En analytisk funktion $f(z)$ i en domän D har en primitiv analytisk funktion i D om och endast om $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ för varje enkel sluten och styckvis glatt kurva γ som ligger helt i D.

(a) funktionen $f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$ är analytisk i domänen $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Utanför $z = 0$ är $f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$ analytisk och $\oint_\gamma f(z)\,dz$=0 för varje enkel sluten styckvis glatt kurva γ som inte omsluter origo enligt Cauchy-Goursat huvudsats.Låt γ omsluta origo. Origo en väsentlig singularitet. Vi undersöker om

$f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$ har någon residu i origo.Detta görs via Laurentserien:

$$f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3\left[1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^4}-\frac{1}{6z^6}+\quad\right] = z^3 - z + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6z^3} +$$

Detta ger att Res $\left[z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right),0\right] = \frac{1}{2}$. Således $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\frac{1}{2} = \pi i$.

Delsvar: $f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ har ingen primitiv funktion i domänen $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(b) På samma sätt som ovan. Det enda problemet som man får är då γ omsluter origo.

$$g(z) = z^2\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^2\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^2\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z^6}+\quad\right] = 1-\frac{1}{6z^4}+$$

Detta ger att Res $\left[z^2\sin\left(\frac{1}{z^2}\right),0\right] = 0$.

Delsvar: $g(z) = z^2\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ har en primitiv funktion i domänen $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

8. Funktionen $f(z)$, där $z = x + iy$ antas vara två gånger kontinuerligt deriverbar med avseende på x och y i domänen D.

Visa att $f(z)$ är analytisk i D om och endast om där gäller att

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x+iy) = 0 \quad \text{och} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[(x+iy) f(x+iy)\right] = 0$$

(3p)

<u>Lösning:</u> $f(x,y) \quad C^2(D)$ innebär med $f = u(x,y) + iv(,x,y)$ att $u,v \quad C^2(D)$

Finns minst tre metoder att lösa uppgiften .Här är ett förslag.

$$\Delta(zf) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(zf) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(zf) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)z + z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[0 + z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right]$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right] + z\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f + z\Delta(f)$$

Således gäller att:

$$\Delta(zf) = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f + z\Delta(f) \quad \text{(ekv)}$$

Då gäller att om $\Delta(zf) = 0 \,\&\, \Delta(f) = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 0.$

Men $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = 0 \Leftrightarrow \left(u_x + iu_y\right) + i\left(v_x + iv_y\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(u_x - v_y\right) + i\left(u_y + v_x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ och antaganden $u,v \quad C^2(D)$ ger att f analytisk i D.

Omvänt antag att f analytisk i D. Enligt ovan är $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 0$ (1).

Ur (ekv) måste vi visa att $\Delta(zf) = 0 \,\&\, \Delta(f) = 0$.

Men $\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) = [(1)] = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)[0] = 0$,

Och (ekv) ger att $\Delta(zf) = 0.$ v.s.v