Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2002-05-28, kl. 08-13.00

5B1117 matematik III, för E och T

1. Vi kan skriva att $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ och använda t.ex kvotkriteriet

om $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ så konvergerar serien absolut då $r < 1$.detta ger

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(3x-1)^{n+1}}{(n+2)}}{\frac{(3x-1)^n}{(n+1)}} \right| = |3x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = |3x-1|.$$ Serien konvergerar absolut om

$|3x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2/3$.

Vi kollar ändpunkterna

a) Sätt in $x = 0$ i serien och får $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ som konvergerar enligt Leibniz' konvergens kriteriet.

b) Sätt in $x = 2/3$ i serien och får $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som divergerar, ty harmonisk serien.

Svar: konvergensmängden $= \{x : 0 \le x < 2/3\}$.

2. $$\iint_D 5x^2\,dxdy = \left[\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{x^2}{y} \\ dxdy = \left| \dfrac{-1}{5x^2} \right| dudv \end{cases} \right] = \int_{u=1}^{4} \int_{v=1}^{2} 1\,dudv = 3$$

3. Se Petermanns bok sid. 229 Ex 9.24

4. $f = (xyz)^b, \quad \mathbf{A} = (x^a, y^a, z^a)$

så

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f\, \nabla \times \mathbf{A} = (\nabla f) \times \mathbf{A} \text{ , ty } \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^a & y^a & z^a \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

Vidare är $\nabla f = b(xyz)^{b-1}(yz, xz, xy) = b(xyz)^b \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, så att

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = b(xyz)^b \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \times (x^a, y^a, z^a).$$

Detta uttryck är noll om och endast om $b = 0$ eller

$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ är parallellt med (x^a, y^a, z^a) dvs $a = -1$

Svar: $b = 0$ eller $a = -1$

5. Vektorfältet $(P, Q) = (x + y/2 + 3, x/2 + y + 5)$ är konservativt ty $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$ på hela $\mathbb{R}^2$ och således är oberoende av vägen mellan kurvans ändpunkterna. Vi ersätter kurvan med linjen L: $\begin{cases} x = -2 \\ y = t, \quad t{:}0 \to -4 \end{cases}$

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_L Pdx + Qdy = \int_0^{-4} (-2 + t/2 + 3)0 + (-2)^2/2 + t + 5)dt = -8$$

Svar: $\int_\Gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right)dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right)dy = -8$

6. Vill använda Gauss'sats. Vi sluter ytan S med ytan $S_1 = x^2 + y^2 < 1, z = 1$

$S + S_1$ omsluter en volym $V{:}\, x^2 + y^2 \le z^2 \le 1,\; z \ge 0$. Gauss'sats ger

$$\oiint_{S+S_1} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS = \iiint_V div(\mathbf{F})dV \Rightarrow \iint_S (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS = \iiint_V div(\mathbf{F})dV - \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS_1$$

a. $\iiint_V div(\mathbf{F})dV = \iiint_V 2zdV = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left[\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2zdz \right] dxdy = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left[1 - (x^2 + y^2)\right] dxdy$,

polära koordinater ger $2\pi \int_0^1 (1 - r^2) rdr = \pi/2$

b. $\iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS_1 = \left[\hat{\mathbf{n}} = (0,0,1), \text{ på } S_1 \text{är } \mathbf{F}(x, y, 1) = (-e^{-y}, e^x, 1)\right] =$

$$= \iint_{S_1} (-e^{-y}, e^x, 1) \cdot (0,0,1)dS_1 = \iint_{S_1} dS_1 = \pi$$

Svar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS = \iiint_V div(\mathbf{F})dV - \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS_1 = \pi/2 - \pi = -\pi/2$

7. Γ är en cirkel i planet $x+z=1$; låt motsvarande cirkelskiva vara S.
Projektionen γ på xy-planet fås ur $x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ 2x^2-2x+y^2=0$.
Efter kvadratkomplettering fås ekvationen $\dfrac{(x-1/2)^2}{1/4}+\dfrac{(y)^2}{1/2}=1$ vilket visar att γ är en ellips med halvaxlarna 1/2 och $1/\sqrt{2}$. Låt D vara området innanför γ.
Stokes'sats är $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$. Vi har $\nabla\times\mathbf{A}=(x,2z-2y,z)$. Vidare

är $\hat{\mathbf{n}}=(1,0,1)/\sqrt{2}$. Alltså är $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S\dfrac{(x+z)}{\sqrt{2}}dS$. På S är

$z=1-x, dS=\sqrt{2}dxdy$, så att $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D\ dxdy=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Svar: $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

8. Låt $\mathbf{r}(u,v,w)=\left(u^2+av^2,2uv,bu+cv+w\right)$, vi får
$\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=(2u,2v,b),\ \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=(2av,2u,c),\ \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=(0,0,1)$.dessa vektorer blir ortogonala om
$\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=b=0\Rightarrow b=0,\ \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=c=0\Rightarrow c=0,\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=4auv+4uv=0\Rightarrow a=-1.$
Basvektorerna blir $\mathbf{e}_u=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}/\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right|=\dfrac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$,pss $\mathbf{e}_v=\dfrac{(-v,u,0)}{\sqrt{u^2+v^2}},\ \mathbf{e}_v=(0,0,1)$.
Vi beräknar komponenterna av vektor $\mathbf{A}=(x,y,3z)=\left(u^2-v^2,2uv,3w\right)$ i den nya ON-basen och får att $A_u=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_u=\left(u^2-v^2,2uv,3w\right)\cdot\dfrac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}=u\sqrt{u^2+v^2}$, pss fås
$Av=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_v=v\sqrt{u^2+v^2}$ och $A_w=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_w=3w$
Svar: $a=-1,b=c=0,A_u=u\sqrt{u^2+v^2},A_u=v\sqrt{u^2+v^2},A_w=3w$

9. Vektorfältets rotation i sfäriska koordinater ges av

$$\nabla\times F=\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ 2r\cos2\theta-\cos\theta & -(2r\sin2\theta-\sin\theta) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-2r^2\sin(2\theta)+r\sin(\theta)\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(2r\cos(2\theta)-\cos(\theta)\right)\right]\mathbf{e}_\varphi=\mathbf{0}$$

Det är alltså virvelfritt överallt, och har en potential $\Phi(r,\theta,\varphi)$, som uppfyller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -2r\cos(2\theta) + \cos(\theta) \Rightarrow \Phi = -r^2\cos(2\theta) + r\cos(\theta) + f(\theta,\varphi) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 2r\sin(2\theta) - \sin(\theta) \Rightarrow \Phi = -r^2\cos(2\theta) + r\cos(\theta) + g(\theta,\varphi) \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \Phi = h(\theta,\varphi) \end{cases}$$

För att alla dessa tre ekvationer skall vara uppfyllda samtidigt, så måste Φ ha formen $\Phi = -r^2\cos(2\theta) + r\cos(\theta) + C$, där C är en konstant.
Integralen blir alltså:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{r=0}^{(r=2,\theta=\pi/2,\varphi=0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(2,\pi/2,0) - \Phi(0,0,0) = 4$$

10. Vektorfältet $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbar utom längs $z-$axeln. Vidare är

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xz}{x^2+y^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{zy}{x^2+y^2}\right] = \frac{2z(x^2+y^2) - 2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

utanför $z-$axeln. Betrakta den volym V_ε som utgöres av den ursprungliga minus en cylinder med radie ε koaxial med $z-$axeln. I V_ε är $\mathbf{F}$ kontinuerligt deriverbar, och Gauss'sats gäller..Inför (rita en figur)

$$\begin{cases} S_m : x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad -1 \le z \le 2 \\ S_c : x^2 + y^2 = \varepsilon^2, \qquad -1 \le z \le 2 \\ S_ö : \varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 5, \qquad z = 2 \\ S_u : \varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 2, \qquad z = -1 \end{cases}$$

$S_\varepsilon = S_m + S_c + S_ö + S_u$ omsluter volym V_ε där $div(\mathbf{F}) = 0$. Gauss'sats ger

$\oiint_{S_\varepsilon}(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}_\varepsilon) = 0$ som implicererar att

$$\oiint_S(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \oiint_{S_m+S_ö+S_u}(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{-S_c}(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S})$$

Nu beräknas $\iint_{-S_c}(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})dS_c = \left[\text{på } -S_c \text{ är } \hat{\mathbf{n}} = (x,y,0)/\varepsilon \text{ och } x^2+y^2=\varepsilon^2\right] =$

$$= \iint_{-S_c}\left(\frac{xz}{\varepsilon^2},\frac{yz}{\varepsilon^2},0\right)\cdot\left(\frac{(x,y,0)}{\varepsilon}\right)dS_c = \iint_{-S_c}\frac{x^2z+zy^2}{\varepsilon^3}dS_c = \left[\begin{cases} x = \varepsilon\cos\theta \\ y = \varepsilon\sin\theta,, dS_c = \varepsilon dz d\theta \\ z = z \end{cases}\right] =$$

$$= \int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z\varepsilon^2\cos^2\theta}{\varepsilon^3} + \frac{z\varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^3}\right)\varepsilon dz d\theta = 2\pi\int_{-1}^{2} z dz = 3\pi$$

Svar: $\oiint_S(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}) = 3\pi$