Institutionen för matematik
KTH

Tentamenskrivning 2002-05-28, kl. 08-13.00

5B1117 matematik III, för E och T

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektiv 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Hjälpmedel: medföljande förmelblad i matematik III.
Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Bestäm konvergensmängden till potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n+1}$. (3p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D 5x^2 dxdy, \quad D = \left\{(x,y):1 \le xy^2 \le 4,\ 1 \le \frac{x^2}{y} \le 2\right\}$. (3p)

3. Beräkna arean av den buktiga ytan $z = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right)$, där $x^2 + y^2 \le 12$. (3p)

4. Låt $\mathbf{A} = (xyz)^b \left(x^a, y^a, z^a\right)$. Bestäm konsterna a och b så att $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. (3p)

5. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right)dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right)dy$ längs den i övre halvplanet belägna bågen av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ från punkten $(-2,0)$ till punkten $(2,0)$ och därifrån rätlinjigt till punkten $(-2,-4)$. (3p)

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \left(-e^{yz}, e^{xz}, z^2\right)$ genom struten S given av $z^2 = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le 1$, och orienterad med utåtriktad normal. (4p)

Vargod vänd

7. Låt Γ vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+z=1$.
kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad, och vektorfältet
$\mathbf{F}=\left(y^2z^2e^{xz}+z^2,\ 2yze^{xz}+zx,\ y^2(1+xz)e^{xz}+2xy\right)$.

a. Visa att $rot(\mathbf{F})=\left(x,2z-2y,z\right)$. (2p)

b. Beräkna $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. (2p)

8. Bestäm konstanterna a,b,c så att

$$\begin{cases} x=u^2+av^2 \\ y=2uv \\ z=bu+cv+w \end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w). (2p)

Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u,A_v,A_w av vektorfältet $\mathbf{A}=\left(x,y,3z\right)$. (2p)

9. Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater,
$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi)=(2r\cos 2\theta-\cos\theta)\mathbf{e}_r-(2r\sin 2\theta-\sin\theta)\mathbf{e}_\theta$.
Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där Γ är en reguljär kurva i rymden
med startpunkt i origo och slutpunkt $r=2,\ \theta=\pi/2,\ \varphi=0$. (4p)

10. En volym V begränsas av hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=1$ och planen $z=-1$ och $z=2$.
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=\left(\dfrac{xz}{x^2+y^2},\dfrac{yz}{x^2+y^2},0\right)$ ut ur V.
(Observera att vektorfältet är singulärt längs $z-$axeln). (5p)