Institutionen för matematik,
KTH

Tentamensskrivning i Differentialekvationer och transformer I, 5B1200 och 5B1220

Måndagen den 26 maj 2003, kl 14.00 - 19.00

Hjälpmedel: Beta

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Svaren ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 trepoängsuppgifter.
För godkänt krävs minst 16 poäng eller 5 godkända lappskrivningar.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5 och omfattar 20 poäng. Uppgifterna $11-14$ ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
Godkänd lappskrivning nr i ger uppgift nr i godkänd, $i = 1, 2, ...7$.

Del 1

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' - y^2 = 2xy^2, \quad y(2) = 1.$$

2. En tank innehåller 1000 liter vatten med 3000 gram salt löst vid tidpunkten $t = 0$ (t räknas i minuter). In i tanken strömmar en saltlösning som innehåller $2 + \sin t$ g/l salt med en hastighet av 10 l/min. Samtidigt förs den väl omrörda saltblandningen ut ur tanken med samma hastighet.

a) Ställ upp en differentialekvation för saltmängden $Q(t)$ i tanken vid tidpunkten t.

b) Bestäm $Q(t)$ för $t > 0$.

c) Då $t \to \infty$ kommer $Q(t)$ att oscillera kring ett konstant värde. Bestäm detta värde.

3. Bestäm en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter som är sådan att $y_1 = 1$ och $y_2 = e^{-x}$ är lösningar till den motsvarande homogena ekvationen och $y_p = \frac{1}{2}x^2 - x$ är en partikulärlösning till ekvationen.

4. Bestäm konstanten a i begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + y = \delta(t-2\pi) + \delta(t-4\pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = a \end{cases}$$

så att lösningen uppfyller villkoret $y(\frac{5\pi}{2}) = 2$.

5. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{X} + te^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. I en rovdjur-byte-modell antas att om rovdjur saknas, så växer bytesdjurstammen logistiskt. Antag att $x(t)$ är antalet rovdjur och $y(t)$ antalet bytesdjur vid tidpunkten t. Bestäm de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{cases} x' = -2x + xy \\ y' = -xy + 3y - y^2 \end{cases}$$

och klassificiera dem med avseende på typ och stabilitet.

7. a) Bestäm Fourierserien till funktionen f som definieras genom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad -\pi < x \leq 0 \\ 2 - x & \text{för} \quad 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

b) Mot vilket värde konvergerar Fourierserien i punkten $x = 0$?

8. Bestäm $y = y(t)$ då

$$y'(t) - \int_0^t y(t-\tau)e^{\frac{3}{2}\tau}\, d\tau = 1, \quad y(0) = 2$$

för $t \geq 0$.

Del 2

11. Definiera begreppet fundamentalmängd av lösningar. Bestäm en sådan mängd av lösningar till differentialekvationen

$$x^2(x+1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

Bestäm sedan den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2(x+1)y'' - 2xy' + 2y = x^3, \quad x > 0.$$

12. a) För vilka värden på konstanten k har begynnelsevärdesproblemet

$$xy' - 4y = 0, \quad y(0) = k$$

(i) oändligt många lösningar?
(ii) inga lösningar?

b) Konstruera en autonom differentialekvation $y' = f(y)$ av första ordningen som har följande egenskaper (antag att $y = y(t)$) :
(i) De kritiska punkterna till ekvationen ges av $y = 0$, $y = 2$ och $y = 4$ och
(ii)Lösningen y är växande på intervallen $(-\infty, 0)$ och $(4, \infty)$ och avtagande på intervallen $(0, 2)$ och $(2, 4)$.

Undersök om de kritiska punkterna är asymptotiskt stabila, semistabila eller instabila.

Undersök lösningen för stora värden på t då begynnelsevärdet $y(0) = 1$.

13. Skriv följande icke-linjära begynnelsevärdesproblem

$$x'' = -2x\sqrt{(x')^2 + 1}, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

som ett ekvationssystem. Bestäm systemets kritiska punkter och klassificiera med avseende på typ och stabilitet.

14. En cylinderformad behållare innehåller rent vatten. Över vattnet skiktas vid tidpunkten $t = 0$ en lika stor volym av en vattenlösning med koncentrationen c av ett färgämne så att det sammanlagda vätskedjupet blir h. Beräkna koncentrationen vid behållarens botten som funktion av tiden, om koncentrationen $u = u(x, t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

där a är en konstant. Randvillkor är att $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ vid vätskeytan och vid behållarens botten. Ange också koncentrationen i behållaren efter lång tid.

Lösningar till tentamensskrivningen i Differentialekvationer och transformer I, 5B1200 och 5B1220, den 26 maj 2003

Del 1

1. Ekvationen $y' = y^2(1+2x)$ är separabel. Vi får $\int \frac{dy}{y^2} = \int (1+2x)dx$ och genom integrering $-y^{-1} = x + x^2 + C$. Vidare är $y = -(x+x^2+C)^{-1}$. Begynnelsevillkoret $y(2) = 1$ är uppfyllt om $C = -7$. Lösningen är $y = (7 - x - x^2)^{-1}$.

2. a) Ekvationen är $Q'(t) = 10(2+\sin t) - 10(Q(t)/1000)$, dvs. $Q'(t) + Q(t)/100 = 20 + 10\sin t$.

b) Den homogena ekvationen har lösningen $Q(t) = Ae^{-t/1000}$. Vi söker en partikulärlösning $Q_p(t) = a + b\cos t + c\sin t$. Eftersom $Q_p'(t) = -b\sin t + c\cos t$ får vi ekvationen

$$-b\sin t + c\cos t + \frac{1}{100}(a + b\cos t + c\sin t) = 20 + 10\sin t.$$

Det följer att $-b + \frac{c}{100} = 10, c + \frac{b}{100} = 0$ och $\frac{a}{100} = 20$. Vi får nu

$$Q(t) = Ae^{-t/1000} + Q_p(t)$$

$$= Ae^{-t/1000} + 2000 - 10^5(10^4+1)^{-1}\cos t + 10^3(10^4+1)^{-1}\sin t.$$

Begynnelsevillkoret $Q(0) = 3000$ ger ekvationen $A + 2000 - 10^5(10^4+1)^{-1} = 3000$. Konstanten $A = 1000 + 10^5(10^4+1)^{-1}$.

c) Eftersom $\lim_{t\to\infty} Ae^{-t/1000} = 0$ och värden av $\sin t$ och $\cos t$ varierar mellan -1 och 1, oscillerar $Q(t)$ för stora t kring värdet 2000 g.

3. Den karakteristiska ekvationen är $r(r+1) = 0$. Vi skall bestämma en funktion $f(x)$ så att $y_p = \frac{1}{2}x^2 - x$ är en lösning till ekvationen $y'' + y' = f(x)$. Eftersom $y_p' = x - 1$ och $y_p'' = 1$, får vi $1 + (x-1) = f(x)$. Ekvationen är $y'' + y' = x$.

4. Laplacetransformering ger $s^2F(s) - s - a + F(s) = e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s}$ där $F(s) = L\{y(t)\}$. Vi får nu att

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{a}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}(e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s})$$

Det följer att

$$y(t) = \cos t + a \sin t + \sin(t - 2\pi)U(t - 2\pi) + \sin(t - 4\pi)U(t - 4\pi)$$

och $y(\frac{5\pi}{2}) = a + 1 = 2$. Konstanten $a = 1$.

5. Matrisen till det homogena systemet $X' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X$ har den karakteristiska ekvationen $(\lambda + 4)^2 - 4 = 0$. Egenvärden är -2 och -6. Vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

är motsvarande egenvektorer. Den allmänna lösningen till det homogena systemet är $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}$.

En fundamentalmatris är

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-6t} \\ e^{-2t} & e^{-6t} \end{pmatrix};$$

dess determinant är $-2e^{-8t}$. Inversen till $\Phi(t)$ är $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{6t} & -e^{6t} \end{pmatrix}$. En partikulärlösning är

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) F(t) dt \quad \text{där} \quad F(t) = \begin{pmatrix} te^{-6t} \\ te^{-6t} \end{pmatrix}.$$

Det följer att

$$X_p = \Phi(t) \int \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{6t} & -e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{-6t} \\ te^{-6t} \end{pmatrix} dt = \Phi(t) \int \begin{pmatrix} te^{-4t} \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \Phi(t) \begin{pmatrix} \int te^{-4t} dt \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{6t} & -e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{(4t+1)}{16} te^{-4t} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{(4t+1)}{16} e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t} - \frac{(4t + 1)}{16} e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Vi bestämmer de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{cases} -2x + xy = 0 \\ -xy + 3y - y^2 = 0 \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} x(-2 + y) = 0 \\ y(-x + 3 - y) = 0. \end{cases}$$

Om $x = 0$ ger den andra ekvationen att $y = 0$ eller $y = 3$. Om $y = 2$, ger den andra ekvationen att $x = 1$. Vi får de kritiska punkterna $(0,0), (0,3))$ och $(1,2)$. Jacobimatrisen till systemet är

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} y-2 & x \\ -y & -x+3-2y \end{pmatrix}.$$

I de kritiska punkterna får vi $g'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$g'(0,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad g'(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2. \end{pmatrix}$$

Matriserna $g'(0,0)$ och $g'(0,3)$ har egenvärden 3 och -2 resp. 1 och -3. Matrisen $g'(1,2)$ har egenvärden $-1 \pm i$.

Svar: $(0,0)$ och $(0,3)$ är sadelpunkter; de är instabila. Punkten $(1,2)$ är en stabil spiralpunkt.

7. a) Med partiell integration får vi om $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2-x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}[(2-x)\frac{\sin nx}{n}]_0^\pi + \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

För $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2-x)dx = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

På samma sätt

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2-x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}[(x-2)\frac{\cos nx}{n}]_0^\pi - \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi n}((\pi - 2)\cos n\pi + 2).$$

Fourierserien till f är

$$1 - \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \cos nx + \frac{1}{\pi n}(2 + (\pi - 2)(-1)^n) \sin nx.$$

b) Fourierserien konvergerar i punkten $x = 0$ mot $\frac{f(0-)+f(0+)}{2} = 1$.

8. Genom att Laplace-transformera ekvationen får vi

$$sF(s) - 2 - \frac{F(s)}{s - \frac{3}{2}} = \frac{1}{s}.$$

där $F(s)$ är Laplace-transformen av y. Vidare är

$$F(s)(s - \frac{2}{2s-3}) = \frac{2s+1}{s}$$

och

$$F(s) = \frac{(2s+1)(2s-3)}{s(2s^2-3s-2)} = \frac{2s-3}{s(s-2)}.$$

Uppdelning i partialbråk ger $F(s) = \frac{1}{2}(\frac{3}{s} + \frac{1}{s-2})$.
Lösningen är $y(t) = \frac{1}{2}(3 + e^{2t})$.

Del 2

11. Vi ser att den homogena ekvationen har en lösning $y_1(x) = x$. Vi söker en annan lösning på formen $y = xv(x)$. Då är $y' = v + xv'$ och $y'' = 2v' + xv''$. Ekvationen blir $x^2(x+1)(2v'' + xv'') - 2x(v + xv') + 2xv = 0$. Om vi skriver $v' = z$ får vi den linjära ekvationen $z' + \frac{2}{x+1}z = 0$. En integrerande faktor är $e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = (x+1)^2$. Vi får $\frac{d}{dx}((x+1)^2 z) = 0$ som medför att $z = v' = \frac{C}{(x+1)^2}$. Funktionen $v(x) = \frac{1}{(x+1)}$. En annan (linjärt oberoende) lösning till den homogena ekvationen är $y_2(x) = \frac{x}{x+1}$. En fundamentalmängd av lösningar är $\{y_1, y_2\}$.

Genom variation av parametrarna söker vi en partikulärlösning $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ till den ickehomogena ekvationen. Funktionerna u_1' och u_2' fås ur systemet

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = \frac{x}{x+1} \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} xu_1' + \frac{x}{x+1}u_2' = 0 \\ u_1' + \frac{1}{(x+1)^2}u_2' = \frac{x}{x+1}. \end{cases}$$

Från den första ekvationen får vi $u_2' = -(x+1)u_1'$. Insättning i den andra ekvationen ger $u_1' = 1$. Vi får $u_1 = x$, $u_2 = -\frac{(x+1)^2}{2}$ och $y_p(x) = x^2 - \frac{(x+1)^2}{2}\frac{x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{2}$.

Den allmänna lösningen är $y(x) = C_1 x + C_2 \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}x^2$.

12. a) Vi separerar variablerna och integrerar $\frac{dy}{y} = \frac{4}{x}dx$. Vi får $\ln|y| = 4\ln|x| + c = \ln x^4 + c$. Lösningen är $y = Cx^4$. Om $k = 0$, har begynnelsevärdesproblemet oändligt många lösningar. Om $k \neq 0$, finns det inga lösningar.

b) Ekvationen $y' = y(y-2)^2(y-4)$ är autonom. De kritiska punkterna ges av $y = 0, y = 2$ och $y = 4$. På intervallen $y < 0$ och $y > 4$ är $y' > 0$, dvs lösningen y är växande. På intervallen $0 < y < 2$ och $2 < y < 4$ är $y' < 0$. Där är lösningen avtagande.

Den kritiska punkten $y = 0$ är stabil, $y = 2$ är semistabil och $y = 4$ är instabil.

Eftersom begynnelsevärdet $y(0) = 1$ är mellan 0 och 2, är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

13. Genom att skriva $y' = x$ får vi systemet

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -2x\sqrt{y^2+1}. \end{cases}$$

Origo är den enda kritiska punkten. Systemets Jacobimatris är

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{y^2+1} & -\frac{2xy}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Vi använder fasplanmetoden för att matrisen $g'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ har imaginära egenvärden. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\sqrt{y^2+1}}{y}$$

är separabel. Vi får

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = -2\int xdx, \quad \text{dvs.} \quad \sqrt{y^2+1} = -x^2 + C.$$

Från villkoren $x(0) = x_0,\ y(0) = 0$ får vi $C = 1 + x_0^2$. Detta medför att $y^2 = (1 + x_0^2 - x^2)^2 - 1$. Om $-x_0 < x < x_0$ dvs. $x^2 < x_0^2$, så är $y^2 > 0$ (Vi kan anta att $x_0 > 0$). För varje x, $x_0 < x < x_0$ får vi två lösningar $y = \pm\sqrt{(1 + x_0^2 - x^2)^2 - 1}$ förutom när $x = \pm x_0$ då $y = 0$. För varje val av x_0 får vi en sluten kurva. Detta innebär att origo är ett centrum. Den kritiska punkten är alltså stabil.

14. Vi har den partiella differentialekvationen $u_{xx} - a^{-1}u_t = 0$ och randvillkoren $u_x(0,t) = 0$ och $u_x(h,t) = 0$ för $t > 0$ och begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$, där

$$f(x) = \begin{cases} c, \text{ om} & 0 \le x \le h \\ 0, \text{ om} & \frac{h}{2} < x < h. \end{cases}$$

Här är $x-$axeln nedåt med origo vid den fria vätskeytan. Insättning av $u(x,t) = X(x)T(t)$ i ekvationen ger

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{aT} = -\lambda^2.$$

Vi får ekvationerna

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{och} \quad T' + a\lambda^2 T = 0.$$

Dessa har lösningarna $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ och $T(t) = C_3 e^{-a\lambda^2 t}$. Från första randvillkoret följer att $X'(0) = C_2\lambda = 0$ vilket medför att $C_2 = 0$. Från andra randvillkoret följer att $X'(h) = -C_1\lambda \sin \lambda h = 0$. Vi får att

$\lambda_n = \frac{n\pi}{h}$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Det följer att funktionerna $u_n(x,t) = \cos \frac{n\pi}{h} x\, e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{h^2}}$, $n = 0, 1, ...$ uppfyller differentialekvationen och randvillkoren.

Låt $u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{h} x e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{h^2}}$. För $t = 0$ får vi $u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{h} x = f(x)$. Detta är Fourierserien till den jämna utvidgningen av f. Då gäller $A_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} cdx = c$ och $A_n = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} c \cos \frac{n\pi}{h} x dx =$

$\frac{2c}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 1$. Vi får

$$u(x,t) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c}{\pi n} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{n\pi}{h}x\, e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{h^2}} \tag{1}$$

Vid botten har vi $x = h$:

$$u(h,t) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c}{\pi n} \sin\frac{n\pi}{2} \cos n\pi\, e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{h^2}}$$

Eftersom $\cos n\pi = (-1)^n$ och $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ om n är jämn, får vi (med $n = 2k+1$):

$$u(h,t) = \frac{c}{2} - \frac{2c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{a(2k+1)^2\pi^2 t}{h^2}}.$$

Ur (1) följer att $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{c}{2}$.