KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN SF1646
Analys i flera variabler, 6 hp för CKEMV1, CBIOT1
Onsdagen 20/5 2009 kl. 08-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Godkänt på KS nr i ger automatiskt full poäng på tal nr i. 12 p ger säkert godkänt. För poäng krävs väl motiverade lösningar. Endast svar ger 0 p.

1. Låt $f(x, y, z) = x^2y + y^2z$. Beräkna riktningsderivatan i punkten $(1, 1, 2)$ i den riktning som ges av $-\operatorname{grad} f(1, 1, 2)$. (3p)

2. Låt $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y)$ och avgör deras typ. (3p)

3. Beräkna volymen av den kropp K i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}$. (3p)

4. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma det minsta värdet av $x^4+y^4+z^4$ då (x, y, z) varierar i planet $x+y+z = 6$. (3p)

5. a) I området $\{(x, y)\,;\, x > 0\}$ inför vi de nya variablerna $u = x^2 + 2y$, $v = y$. Transformera uttrycket

   $$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$$

   till de nya variablerna. (2p)

   b) Utnyttja resultatet i a) för att bestämma den allmänna C^1-lösnngen till den partiella differentialekvationen

   $$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

   i området $\{(x, y)\,;\, x > 0\}$. Lösningen z skall uttryckas som en funktion av x och y. (1p)

v.g.v.

6. Låt D vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$. Beräkna integralen
$$\iint_D e^{y^2}\,dxdy.$$
(3p)

7. Arean A av en funktionsyta $z = f(x,y)$ där (x,y) tillhör en begränsad mängd D ges av
$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$
Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger inuti mängden $\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le a^2\,,\ y \ge x\}$, där a är en given konstant. (3p)

8. Medelavståndet för elektronen i väteatomen till atomkärnan ges i grundtillståndet av integralen
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2+y^2+z^2}(\psi(x,y,z))^2\,dxdydz,$$
där
$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{a_0^{3/2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{a_0}\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
och a_0 ar den så kallade Bohrradien ($\approx 5,29 \cdot 10^{-11}$ m). Beräkna medelavståndet uttryckt i a_0.
(Du får utnyttja att $\int_0^\infty s^n e^{-s}\,ds = n!$ för $n \ge 0$.) (3p)

9. Låt kurvan γ ges av randen till kvadraten med hörn i punkterna $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ och $(1,-1)$ och ge γ positiv orientering. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy.$$
(3p)

LYCKA TILL!