Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2009-05-20

1) Gradienten ges av

$$\text{grad}\, f = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$$

vilket ger $\text{grad}\, f(1,1,2) = (2,3,1)$. En enhetsvektor $\mathbf{v}$ i riktningen $-\text{grad}\, f(1,1,2) = (2,5,1)$ ges av

$$\mathbf{v} = -\frac{(2,5,1)}{\sqrt{2^2+5^2+1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,1).$$

Riktningsderivatan ges nu av

$$D_{\mathbf{v}} f(1,1,2) = \text{grad}\, f(1,1,2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,1)\right) = -\frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,1)\cdot(2,5,1) = -\sqrt{30}.$$

Alternativt och enklare kan vi komma ihåg att minimala riktningsderivatan är $-|\text{grad}\, f|$ och fås i den riktning som ges av $-\text{grad}\, f$.

Svar: $-\sqrt{30}$.

2) De stationära punkterna ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0.$$

Andra ekvationen ger $y = -x/2$ vilket insatt i första ekvationen ger $3x^2 - x/2 = 0$, dvs. $x = 0$ eller $x = 1/6$. De stationära punkterna är alltså $(0,0)$ och $(1/6, -1/12)$. Vi beräknar andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

I (0,0) får vi den kvadratiska formen

$$Q(h_1,h_2) = 2h_1h_2 + 2h_2^2 = 2(h_2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}h_1^2,$$

som är idefinit. $(0,0)$ är en sadelpunkt. I $(1/6, -1/12)$ får vi den kvadratiska formen

$$Q(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 = \frac{1}{2}h_1^2 + 2(h_2 + \frac{1}{2}h_1)^2,$$

som är positivt definit. $(1/6, -1/12)$ är en lokal minimipunkt.

Svar: $(0,0)$ är en sadelpunkt och $(1/6, -1/12)$ är en lokal minimipunkt.

3) De övre och undre gränserna för z sammanfaller då $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8-(x^2+y^2)}$, vilket ger $x^2+y^2 = 8-(x^2+y^2)$, dvs. $x^2+y^2 = 4$. Kroppen K ges alltså av

$$K = \{(x,y,z)\, ;\, (x,y) \in E,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{8-(x^2+y^2)}\},$$

där $E = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 4\}$. Volymen ges av

$$\mathrm{vol}(K) = \iint_E \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-(x^2+y^2)}} 1\, dz \right) dxdy = \iint_E (\sqrt{8-(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+y^2})\, dxdy.$$

I polära koordinater ges E av $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Övergång till polära koordinater ger

$$\mathrm{vol}(K) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (\sqrt{8-r^2} - r) r\, dr \right) d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(8-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$$

Problemet går också att lösa genom att beskriva kroppen i rymdpolära koordinater.

Svar: $\frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$

4) Vi vill minimera $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x+y+z-6 = 0$. Lagranges multiplikatormetod ger ekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 4x^3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 4y^3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} &= 4z^3 - \lambda = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dessa ekvationer ger $x^3 = y^3 = z^3$ vilket ger $x = y = z$. Insatt i bivillkoret ger detta $3x = 6$, dvs. $x = 2$. Då x, y eller z går mot oändligheten går $x^4 + y^4 + z^4$ mot oändligheten, så $(2,2,2)$ måste ge minimum. Minsta värdet blir $3 \cdot 2^4 = 48$.

Svar: 48

5) a) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0 = 2x\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Detta ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 2x\frac{\partial z}{\partial u} - 2x\frac{\partial z}{\partial u} - x\frac{\partial z}{\partial v} = -x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Nu är $x = \sqrt{u-2y} = \sqrt{u-2v}$.

Svar: $-\sqrt{u-2v}\frac{\partial z}{\partial v}$

b) Räkningarna i a) ger $-x\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ och eftersom $x > 0$ får vi $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$, vilket ger $z = g(u)$ där g är en godtycklig C^1 funktion.

Svar: $z = g(x^2 + 2y)$ där g är en godtycklig C^1 funktion.

6) Området D ges av olikheterna $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$. Upprepad integration ger

$$\begin{aligned}\iint_D e^{y^2}\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\,dx\right) dy = \int_0^1 ye^{y^2}\,dy \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{2}(e-1)$

7) Vi har $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ och $D = \{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 9\,,\, y \geq x\}$. Derivering ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

och vi får

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy.$$

I polära koordinater ges D av $0 \leq r \leq a$, $\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$. Övergång till polära koordinater ger

$$\begin{aligned}A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_0^a r\sqrt{1+4r^2}\,dr\right) d\theta = \frac{\pi}{12}\int_0^a 12r\sqrt{1+4r^2}\,dr \\ &= \frac{\pi}{12}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{\pi}{12}((1+4a^2)^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{12}((1+4a^2)^{3/2} - 1)$

8) Vi vill beräkna integralen

$$\begin{aligned}&\iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\frac{1}{a_0^3\pi}e^{-\frac{2}{a_0}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{a_0^3\pi}\iiint_{D_R} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-\frac{2}{a_0}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz \qquad (2)\end{aligned}$$

där

$$D_R = \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}.$$

D_R är en uttömmande följd för $\mathbb{R}^3$ då $R \to \infty$. I rymdpolära koordinater ges D_R av $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Övergång till rymdpolära koordinater ger

$$\begin{aligned}&\iiint_{D_R} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-\frac{2}{a_0}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz = \int_)^{2\pi}\left(\int_0^\pi\left(\int_0^R re^{-\frac{2}{a_0}r}r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\phi \\ &= 2\pi\left(\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^R r^3e^{-\frac{2}{a_0}r}\,dr\right) = 4\pi\int_0^R r^3e^{-\frac{2}{a_0}r}\,dr.\end{aligned}$$

I den sista integralen gör vi variabelbytet $s = 2r/a_0$, vilket ger integralen

$$4\pi \left(\frac{a_0}{2}\right)^4 \int_0^{2R/a_0} s^3 e^{-s}\, ds.$$

Gränsvärdet i (2) blir

$$\frac{1}{a_0^3\pi} \cdot 4\pi \frac{a_0^4}{16} \int_0^{\infty} s^3 e^{-s}\, ds = \frac{1}{4} a_0 \cdot 3! = \frac{3}{2} a_0.$$

Svar: $\frac{3}{2} a_0$.

9) Låt $P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ och $Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Vi ser att P och Q är C^1 överallt utom i origo. Dessutom är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

dvs. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Låt C vara enhetscirkeln med positiv orientering. I området mellan γ och C är P och Q C^1 funktioner varför Greens formel ger

$$I = \int_\gamma \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy = \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy$$

En parametrisering av C ges av $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Då är $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$ och definitionen av kurvintegralen längs C ger nu

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t - \sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t + \sin t}{1} \cos t\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Svar: 2π.