

KTH Matematik  
Kurt Johansson, Avd. Matematik

**TENTAMEN SF1646**  
**Analys i flera variabler, 6 hp**  
Torsdagen 20/8 2009 kl. 14-19

*Hjälpmedel:* Inga.

*Instruktioner:* Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Godkänt på KS nr  $i$  ger automatiskt full poäng på tal nr  $i$ . 12 p ger säkert godkänt. För poäng krävs väl motiverade lösningar. Endast svar ger 0 p.

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan  $x + xy + xyz = 3$  i punkten  $(1, 1, 1)$ . (3p)
2. Visa att  $(-1, 1)$  är en stationär punkt till funktionen  $f(x, y) = 2y^2 + 4xy + x^4$  och avgör dess typ. (3p)
3. Arbetet då en partikel rör sig längs kurvan  $C$  under inverkan av kraften  $\mathbf{F}$  ges av

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Beräkna arbetet  $W$  då  $\mathbf{F}(x, y) = (-xy^3, 2x^2y)$  och kurvan  $C$  ges av  $y = 1/x$  från  $(1, 1)$  till  $(3, 1/3)$ . (3p)

4. Bestäm Taylorutvecklingen kring origo till och med andra ordningen av funktionen  $f(x, y) = x + 3y^2 + \sin(x^2 + y)$ . (3p)
5. Beräkna integralen  $\iint_D xy + 2x \, dx \, dy$ , där  $D$  är området som ges av olikheterna  $x^2 \leq y \leq 2x$ . (3p)
6. Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen

$$\int_C (-y^3 + x) \, dx + x^3 \, dy$$

där  $C$  är enhetscirkeln  $x^2 + y^2 = 1$  tagen ett varv i positiv led.

(3p)

v.g.v.

7. Masstätheten för en gas ges av

$$\rho(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

där  $c$  är en fysikalisk konstant. Gasen befinner sig i rummet utanför ett klot som ges av  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , dvs. i mängden  $K = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$ . Beräkna gasens totala massa uttryckt i  $c$ . (3p)

8. Funktionen  $f$  definieras av

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$$

då  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

a) Beräkna gränsvärdet  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . (2p)

b) Hur skall funktionen  $f$  definieras i  $(0, 0)$  så att den blir kontinuerlig i  $(0, 0)$ ? (1p)

9. Låt  $g$  vara en  $C^2$  funktion av en variabel och sätt  $f(x, y) = g(r)$ , där  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

a) Visa att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(r) + \frac{1}{r}g'(r). \quad (1p)$$

b) Antag att  $g'(1) = 1$ . Beräkna integralen

$$\iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dx dy,$$

där  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ . (2p)

LYCKA TILL!