Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2009-08-20

1) Sätt $f(x,y,z) = x + xy + xyz - 3$. Vi bestämmer $\operatorname{grad} f(1,1,1)$ som ger en normalvektor till ytan i punkten $(1,1,1)$.

$$\operatorname{grad} f = (1 + y + yz, x + xz, xy).$$

Detta ger $\operatorname{grad} f(1,1,1) = (3,2,1)$. Tangentplanets ekvation är

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0,$$

vilket ger $3(x-1) + 2(y-1) + z - 1 = 0$ eller $3x + 2y + z = 6$.

Svar: $3x + 2y + z = 6$

2) Vi har att

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (4y + 4x^3, 4y + 4x),$$

varför $\operatorname{grad} f(1,1) = (0,0)$, dvs. $(-1,1)$ är en stationär punkt. Nu är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4,$$

vilket ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) = 4.$$

Detta ger den kvadratiska formen

$$12h_1^2 + 8h_1h_2 + 4h_2^2 = 8h_1^2 + 4(h_1 + h_2)^2$$

som är positivt definit. Alltså är $(-1,1)$ ett lokalt minimum.

Svar: $(-1,1)$ är ett lokalt minimum.

3) Vi väljer $x = t$ som parameter och får då parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 1/t)$, $1 \le t \le 3$ av C. Detta ger $\mathbf{r}'(t) = (1, -1/t^2)$. Enligt definitionen är

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_1^3 (-\frac{1}{t^2}, 2t) \cdot (1, -\frac{1}{t^2})\, dt \\ &= \int_1^3 -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\, dt = -\frac{2}{3} - 2\ln 3. \end{aligned}$$

Svar: $-\frac{2}{3} - 2\ln 3$.

4) Taylorutvecklingen till och med andra ordningen ges av

$$f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial}(0,0)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right).$$

Vi ser att $f(0,0) = 0$ och beräkning av de partiella derivatorna ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2x\cos(x^2+y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + \cos(x^2+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y) - 4x^2\sin(x^2+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x\sin(x^2+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 - \sin(x^2+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 6.$$

Detta ger Taylorpolynomet

$$x + y + \frac{1}{2}(2x^2 + 6y^2) = x + y + x^2 + 3y^2.$$

Svar: $x + y + x^2 + 3y^2$.

5) $x^2 = 2x$ ger $x = 0$ eller $x = 2$. D ges alltså av $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 2x$. Upprepad integration ger nu

$$\iint_D xy + 2x\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} xy + 2x\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2} + 2xy \right]_{x^2}^{2x} dx$$
$$= \int_0^2 4x^2 - \frac{x^5}{2}\,dx = \frac{16}{3}.$$

Svar: $\frac{16}{3}$.

6) Låt $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Integranden är kontinuerligt deriverbar i hela planet varför Greens formel ger

$$I = \int_C (-y^3 + x)\,dx + x^3\,dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} x^3 - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3 + x)\,dxdy$$
$$= 3\iint_D x^2 + y^2\,dxdy.$$

Vi övergår till polära koordinater och får

$$I = 3 \cdot 2\pi \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr = \frac{3\pi}{2}.$$

Svar: $\frac{3\pi}{2}$.

7) Gasens totala massa ges av

$$M = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dxdydz = c\iiint_K \frac{dxdydx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

En uttömmande följd till K ges av $K_R : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le R$, $R \to \infty$. K_R ges i rymdpolära koordinater av $0 \le \pi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $1 \le r \le R$. Övergång till rymdpolära koordinater ger

$$\begin{aligned} M &= \lim_{R\to\infty} c\iiint_{K_R} \frac{dxdydx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \lim_{R\to\infty} c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_1^R \frac{1}{r^5}\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\phi \\ &= \lim_{R\to\infty} 2\pi c\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_1^R \frac{1}{r^3}\,dr\right) = \lim_{R\to\infty} 4\pi c\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_1^R = 2\pi c. \end{aligned}$$

Svar: Totala massan är $2\pi c$.

8) a) Inför polära koordinater, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} = \frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^3}{r^2} = r(\cos\theta+\sin\theta)^3.$$

Detta ger

$$0 \le \left|\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}\right| \le r|\cos\theta+\sin\theta|^3 \le r\cdot 2^3 = 8r.$$

eftersom $|\cos\theta| \le 1$ och $|\sin\theta| \le 1$ för alla θ. Eftersom $8r \to 0$ då $r \to 0+$ så existerar gränsvärdet och är lika med 0.

Svar: Gränsvärdet är 0.

b) Om vi sätter $f(0,0) = 0$ får vi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

dvs. f är kontinuerlig i origo.

9) a) Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + g'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + g'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}.$$

Nu är

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3},$$

och motsvarande för derivatorna med avseende på y. Detta ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= g''(r)\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right) + g'(r)\left(\frac{2}{r} - \frac{x^2}{r^3} - \frac{y^2}{r^3}\right) \\ &= g''(r) + \frac{1}{r}g'(r).\end{aligned}$$

b) Övergång till polära koordinater ger

$$\begin{aligned}&\iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int 0^1 (g''(r) + \frac{1}{r}g'(r))r\,dr\right)d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 rg''(r) + g'(r)\,dr = 2\pi \int_0^1 \frac{d}{dr}\left(rg'(r)\right)\,dr \\ &= 2\pi\left[rg'(r)\right]_0^1 = 2\pi g'(1) = 2\pi.\end{aligned}$$

Svar: 2π.