KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN SF1646
Analys i flera variabler, 6 hp
Fredagen 28/5 2010 kl. 8-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Godkänt på KS nr i ger automatiskt full poäng på tal nr i. 12 p ger säkert godkänt. För poäng krävs väl motiverade lösningar. Endast svar ger 0 p.

1. Transformera uttrycket
$$2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$
genom att införa de nya variablerna $u = y^2/x$, $v = x$. (3p)

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen $f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x+y}$. (3p)

3. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma -xy^3\,dx + 2x^2y\,dy$$
om γ är kurvan $xy = 1$ från $(1,1)$ till $(\frac{1}{3}, 3)$. (3p)

4. Bestäm volymen av den kropp som ges av olikheterna
$$x^2 + y^2 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2}.$$
(3p)

5. Beräkna integralen
$$\iiint_\Omega z^2\,dxdydz,$$
där Ω är halvklotet givet av $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$. (3p)

v.g.v.

6. Låt $D = \{(x,y)\,;\, x \geq 0, y \geq 0\}$ vara första kvadranten. Är integralen

$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^3}\, dxdy$$

konvergent? Beräkna i så fall dess värde. (3p)

7. Bestäm det största värdet av $f(x,y,z) = 3xz - y$ givet att $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (3p)

8. Låt K vara den homogena konen som ges av olikheterna $a\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h$, där a och h är positiva tal. Låt (x_c, y_c, z_c) vara tyngdpunkten för K. Av symmetriskäl är det klart att $x_c = y_c = 0$. Det gäller att

$$z_c = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \iiint_K z\, dxdydz.$$

Beräkna z_c.

(3p)

9. Låt D vara ett slutet område i $\mathbb{R}^2$ med en positivt orienterad C^1 randkurva ∂D, och låt $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ vara en C^2 entydigt omvändbar avbildning i D med positiv Jacobian (funktionaldeterminant). Låt E beteckna bilden av D under avbildningen F. Visa att

$$\mathrm{area}(E) = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial x}\, dx + u\frac{\partial v}{\partial y}\, dy.$$

(3p)

LYCKA TILL!