Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2009-08-20

1) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{2y}{x}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2y^2}{x}\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{2y^2}{x}\frac{\partial f}{\partial u} \\ &= 2x\frac{\partial f}{\partial v} = 2v\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

Svar: $2v\frac{\partial f}{\partial v}$

2) Vi söker stationära punkter,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x+y} + (x^2-2y^2)e^{x+y} = (x^2-2y^2+2x)e^{x+y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4ye^{x+y} + (x^2-2y^2)e^{x+y} = (x^2-2y^2-4y)e^{x+y} = 0.$$

Vi ser från dessa ekvationer att $2x = -4y$ eller $x = -2y$. Insatt i $x^2 - 2y^2 - 4y =$ från andra ekvationen ger detta $2y^2 - 4y = 0$, dvs. $y = 0$ eller $y = 2$. De stationära punkterna är $(0,0)$ och $(-4,2)$. Nu är

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2x+2)e^{x+y} + (x^2-2y^2+2x)e^{x+y},$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4ye^{x+y} + (x^2-2y^2+2x)e^{x+y}.$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-4y-4)e^{x+y} + (x^2-2y^2-4y)e^{x+y},$$

I $(0,0)$ får vi $A = 2$, $B = 0$ och $C = -4$, vilket ger den kvadratiska formen $2h^2 - 4k^2$, som är indefinit. $(0,0)$ är en sadelpunkt. I $(-4,2)$ får vi $A = -6e^{-2}$, $B = -8e^{-2}$, $C = -12e^{-2}$, vilket ger den kvadratiska formen

$$-6e^{-2}(h^2 + \frac{8}{3}hk + 2k^2) = -6e^{-2}[(h + \frac{4}{3}k)^2 + \frac{2}{8}k^2],$$

som är negativt definit. $(-4,2)$ är ett lokalt maximum.

Svar: Lokalt maximum i $(-4, 2)$. Inga lokala minima.

3) En parametrisering ges av $x(t) = \frac{1}{t}$, $y(t) = t$, $1 \le t \le 3$. Vi får $x'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $y'(t) = 1$ och

$$\int_\gamma -xy^3\,dx + 2x^2y\,dy = \int_1^3 -\frac{1}{t}\cdot t^3(-\frac{1}{t^2}) + 2\frac{1}{t^2}\cdot t\,dt$$
$$= \int_1^3 \frac{2}{t} + 1\,dt = 2\ln 3 + 2.$$

Svar: $2\ln 3 + 2$.

4) Låt K beteckna kroppen. De två ytorna skär varandra då $x^2 + y^2 = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$, vilket ger $\sqrt{x^2+y^2} = 1$. Om D ges av $x^2 + y^2 \le 1$, så ges K alltså av $K = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ (x, y) \in D\}$. Alltså,

$$\operatorname{vol}(K) = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} 1\,dz\right) dxdy = \iint_D 2 - \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\,dxdy.$$

Byter vi till polära koordinater får vi

$$\operatorname{vol}(K) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (2 - r - r^2)r\,dr\right) d\theta = 2\pi\left[r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{6}\pi.$$

Svar: $\frac{5}{6}\pi$

5) Vi byter till rymdpolära koordinater. Ω ges av $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Jacobianen är $r^2 \sin\theta$ och $z = r\cos\theta$. Alltså ges integralen av

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\right) d\theta\right) d\phi = 2\pi\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^4\,dr\right)$$
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{15}.$$

Svar: $\frac{2\pi}{15}$

6) Välj $D_n = \{(x, y)\,;\, 0 \le x \le n, 0 \le y \le n\}$, $n \ge 1$, som uttömmande följd. Då är

$$\iint_{D_n} \frac{1}{(1+x+y)^3}\,dxdy = \int_0^n\left(\int_0^n \frac{1}{(1+x+y)^3}\,dx\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1+y+n)^2}\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+y+n}\right]_0^n = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{1+n} + \frac{1}{1+2n}).$$

Detta går mot 1/2 då $n \to \infty$, ty $\frac{2}{1+n} \to 0$ och $\frac{1}{1+2n} \to 0$ då $n \to \infty$.

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\frac{1}{2}$.

7) Vi använder Lagranges multiplikatormetod. Sätt $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Vi har då målfunktionen $f(x, y, z) = 3xz - y$ och bivillkoret $g(x, y, z) = 0$. (Vi har att $\operatorname{grad} g \neq 0$ om $g(x, y, z) = 0$.). Vi får villkoren

$$3z = 2x\lambda, \quad -1 = 2y\lambda, \quad 3x = 2z\lambda.$$

Från den andra ekvationen ser vi att $\lambda = 0$ är omöjligt. Om $x = 0$ ger den första ekvationen att $z = 0$ vilket insatt i bivillkoret ger $y = \pm 1$. Två möjliga punkter är alltså $(0, 1, 0)$ och $(0, -1, 0)$. Om $x \neq 0$ är $z \neq 0$ och första och tredje ekvationen ger

$$\frac{3}{2}\frac{x}{z} = \lambda = \frac{3}{2}\frac{z}{x},$$

vilket ger $z = \pm x$. $z = x$ ger $\lambda = 3/2$ och andra ekvationen ger $y = -1/3$. Bivillkoret ger nu $x = z = \pm 2/3)$. Detta ger punkterna $(2/3, -1/3, 2/3)$ och $(-2/3, -1/3, -1/3)$. Om $z = -x$ får vi $\lambda = -3/2$ och andra ekvationen ger $y = 1/3$, Bivillkoret ger nu $x = 2/3$, $z = -2/3$ eller $x = -2/3$, $z = 2/3$. Vi får punkterna $(-2/3, 1/3, 2/3)$, $(2/3, 1/3, -2/3)$. Beräknar vi f i alla kandidatpunkterna ser vi att $(2/3, -1/3, 2/3)$ och $(-2/3, -1/3, -1/3)$ ger det största värdet nämligen $5/3$.

Svar: Största värdet $5/3$ antas i punkterna $(2/3, -1/3, 2/3)$ och $(-2/3, -1/3, -1/3)$.

8) Konens yta skär planet $z = h$ då $a\sqrt{x^2 + y^2} = h$, vilket ger $\sqrt{x^2 + y^2} = h/a$. Konen K beskrivs alltså av $a\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ och $(x, y) \in D$, där D ges av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq h/a$. Volymen av K ges av

$$\operatorname{vol}(K) = \iint_D \left(\int_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{h} 1\, dz \right) dxdy = \iint_D h - a\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Övergång till polära koordinater ger

$$\operatorname{vol}(K) = 2\pi \int_0^{h/a} (h - ar)r\, dr = 2\pi \left[\frac{hr^2}{2} - \frac{ar^3}{3} \right]_0^{h/a} = \frac{\pi}{3}\frac{h^3}{a^2}.$$

Vi beräknar också

$$I = \iiint_K z\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\, dz \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint_D h^2 - a^2(x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Övergång till polära koordinater ger

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^{h/a} (h^2 - a^2 r^2) r\, dr = \frac{\pi}{4}\frac{h^4}{a^2}.$$

Detta ger

$$z_c = \frac{\frac{\pi}{4}\frac{h^4}{a^2}}{\frac{\pi}{3}\frac{h^3}{a^2}} = \frac{3}{4}h.$$

Svar: $z_c = \frac{3}{4}h$

9) Arean av E ges av

$$\operatorname{area}(E) = \iint_E 1\,dudv.$$

Byt variabler till $(x,y) \in D$. Jacobianen $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ är positiv enligt antagande varför

$$\operatorname{area}(E) = \iint_D \frac{d(u,v)}{d(x,y)}\,dxdy = \iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdy.$$

Greens formel ger

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + u\frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\,dxdy \\
&= \iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right)\,dxdy = \iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdy.
\end{aligned}$$

Detta visar areaformeln.