

KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN SF1646
Analys i flera variabler, 6 hp
Torsdagen 19/8 2010 kl. 14-19

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Godkänt på KS nr i ger automatiskt full poäng på tal nr i . 12 p ger säkert godkänt. För poäng krävs väl motiverade lösningar. Endast svar ger 0 p.

1. Beräkna riktningsderivatan av funktionen

$$f(x, y) = x^2y + \sin(x - 1)$$

i punkten $(1, 0)$ och i den riktning som ges av vektorn $(4, 3)$.

(3p)

2. Visa att funktionen $f(x, y) = e^{x^2} - 2 \cos y + xy + x^3$ har ett lokalt minimum i $(0, 0)$.

(3p)

3. Beräkna integralen

$$\iiint_K \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

där K ges av olikheterna $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

(3p)

4. Beräkna integralen

$$\iint_D \sqrt{x+y} \, dx dy,$$

där $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

(3p)

v.g.v.

5. Bestäm Taylorutvecklingen till och med andra ordningen av

$$f(x, y) = \sin(x + y)e^x$$

kring punkten $(1, 1)$.

(3p)

6. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (x^2 - y) dx + (x + y^2) dy,$$

där γ är ellipsen $x^2 + y^2/4 = 1$ tagen ett varv i positiv led.

(3p)

7. Låt K vara den kropp som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$. Beräkna K :s massa om dess densitet ges av $\rho(x, y, z) = cxyz$, där c är en fysikalisk konstant.

(3p)

8. Nivåytorna $x^2 + y^2 + 2z^2 = c$ och $xy + z^2 = 2$ har åtminstone en gemensam punkt där ytornas tangentplan sammanfaller. Bestäm konstanten c .

(3p)

9. Antag att $f(u, v)$ är en harmonisk C^2 funktion, dvs.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Visa att då är även $g(x, y) = f(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ harmonisk, dvs.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

(3p)

LYCKA TILL!