Kortfattade lösningar till KS2, SF1646

Version 1: (Version 2 nära identisk)
1. Vi har (för båda versionerna, med andra bokstäver)

$$\int_1^2 \int_0^1 (4-x-y)dxdy = \int_1^2 \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{7}{2} - y\right) dy$$
$$= \left[\frac{7y}{2} - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = 7 - 2 - \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

2. Vi deriverar partiellt och söker kandidater till maxvärde inne i kvadraten:

$$0 = g'_x(x,y) = -(y-1)e^{-(x-1)(y-1)} \text{ och } 0 = g'_y(x,y) = -(x-1)e^{-(x-1)(y-1)}.$$

Detta ger punkten $(1,1)$ som ger värdet $g(1,1) = e^0 = 1$.
Vi undersöker randen.

- Först $x = 0$, då blir $g(0,y) = e^{(y-1)} =: f(y)$. Vi ser att f är monotont växande i y så maximalt värde för f blir $f(2) = e^1 = e$.
- Sedan $x = 2$, då blir $g(2,y) = e^{-(y-1)} =: k(y)$. Vi ser att k är monotont avtagande så maximalt värde för k blir $k(0) = e^{-(-1)} = e$.
- På liknande sätt kan $y = 0$ och $y = 2$ undersökas. Men allt är symmetriskt i $x \leftrightarrow y$ så vi får igen maxvärdet e.

Eftersom $e > 1$ så blir SVAR: Maxvärdet av funktionen är e.

3. Vi väljer att integrera i växande cirkelskivor, och byter till polära koordinater:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}e^{-3\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} dxdy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} \sqrt{x^2+y^2}e^{-3\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} dxdy$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R re^{-3r^3} rdrd\phi = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-3r^3}}{-9}\right]_0^R d\phi$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-3R^3}}{-9} - \frac{1}{-9}\right) d\phi = \lim_{R\to\infty} 2\pi \left(-\frac{e^{-3R^3}}{9} + \frac{1}{9}\right)$$
$$= 2\pi\left(0 + \frac{1}{9}\right) = \frac{2\pi}{9}$$

Svar version 2: $2\pi/4$ ($=\pi/2$).