Lösningar till Kontrollskrivning 1A, SF1646, CKEMV1/CBIOT1, VT09

Lösningarna på version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1a) Ingen del av randen $\partial M = \{(x,y)\,;\, x^2+2y^2=4\}$ ingår i M varför M är en öppen mängd.

Svar: Mängden M är öppen.

Svar version B: Mängden M är öppen.

1b) Tangentplanets ekvation är

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) + f(1,1).$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{(4-(x^2+2y^2))^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{4y}{(4-(x^2+2y^2))^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4. \end{aligned}$$

Vidare är $f(1,1)=1$. Vi får ekvationen

$$z = 2(x-1) + 4(y-1) + 1 = 2x + 4y - 5.$$

Svar: $z = 2x + 4y - 5$.

Svar version B: $z = 6x + 2y - 7$.

2) Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y\,,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Insättning i kedjeregeln och förenkling ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-2y+)\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x\right) \\ &= 4\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)\frac{\partial f}{\partial v} = 4\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

Svar: $4\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$

Svar version B: $4\left(\frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$.

3) Riktningsderivatan är maximal då riktningen ges av gradienten och dess värde är då beloppet av gradienten. Derivering ger

$$\mathrm{grad}\rho(x,y,z) = 10e^{-x^2-2y^2-z^2}(-2x,-4y,-2z),$$

vilket ger

$$\mathrm{grad}\rho(1,1,1) = 10e^{-4}(-2,-4,-2).$$

Beloppet av gradienten blir då

$$|\mathrm{grad}\rho(1,1,1)| = 10e^{-4}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-2)^2} = 10e^{-4}\sqrt{24}\ \mathrm{mol}/\,\mathrm{dm}^4.$$

Svar: $10e^{-4}\sqrt{24}$ mol/dm^4.

Svar version B: $20e^{-4}\sqrt{24}$ mol/dm^4.