Lösningar till Kontrollskrivning 1A, SF1646, CKEMV1/CBIOT1, VT10

Lösningarna på version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1a) Den riktning där riktningsderivatan är maximalt positiv ges av gradienten. Vi får att $\operatorname{grad} f = (2xy + 2y^2, x^2 + 4yx)$, vilket ger $\operatorname{grad} f(1,1) = (4,5)$.

Svar: Riktningsderivatan är maximalt positiv i riktningen $(4,5)$.

Svar version B: Riktningsderivatan är maximalt positiv i riktningen $(7,5)$.

1b) Den maximala riktningsderivatan ges av beloppet av gradienten, ty

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \leq |\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|$$

med likhet om $\mathbf{v}$ har samma riktning som gradienten. Vi ser att $|\operatorname{grad} f(1,1)| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.

Svar: $\sqrt{41}$

Svar version B: $\sqrt{74}$

2) Låt $f(x,y,z) = x^4 + 2y^4 + z^4 - x$. Tangentplanet ges av

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0.$$

Nu är $\operatorname{grad} f = (4x^3 - 1, 8y^3, 4z^3)$, varför $\operatorname{grad} f(1,1,1) = (3,8,4)$. Vi får ekvationen $3(x-1) + 8(y-1) + 4(z-1) = 0$ eller $3x + 8y + 4z = 15$.

Svar: $3x + 8y + 4z = 15$

Svar version B: $8x + 3y + 4z = 15$

3) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Vi måste yttrycka y i u och v. $v = x + 1/y$ ger $vy = xy + 1 = u + 1$, vilket ger $y = \frac{u+1}{v}$. Alltså är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u+1}{v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Svar: Se ovan.

Svar version B:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u-1}{v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$