Lösningar till Kontrollskrivning 2A, SF1646, K1/BIO1, VT08

Lösningarna på version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1) Vi söker punkter där grad $f(x, y) = (0, 0)$. Nu är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2}$$

och vi ser att enda möjligheten är $x = y = 0$. Alltså är $(0, 0)$ enda stationära punkt. För att avgöra vilken typa av stationär punkt origo är beräknar vi andraderivatorna i origo. Detta ger

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)=(0,0)} = 2e^{x^2-y^2} + 4x^2e^{x^2-y^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 2,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^\partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)} = -4xye^{x^2-y^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0,$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)=(0,0)} = -2e^{x^2-y^2} + 4y^2e^{x^2-y^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2.$$

Vi bildar nu den kvadratiska formen $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2h^2 - 2k^2$. Vi ser att denna är indefinit, varför origo är en sadelpunkt.

Svar: Enda stationära punkten är origo som är en sadelpunkt.

Svar version B: Samma svar.

2) Vi har att

$$\iint_D (2 + \cos x \sin y)\, dxdy = 2 \cdot \text{area}\,(D) + \left(\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx\right)\left(\int_{-\pi/2}^{0} \sin y\, dy\right)$$

$$2 \cdot \frac{\pi^2}{4} + [\sin x]_0^{\pi/2}\,[-\cos y]_{-\pi/2}^{0} = \frac{\pi^2}{2} - 1$$

Svar: $\frac{\pi^2}{2} - 1$ *Svar version B*: $\frac{\pi^2}{2} + 1$

3) Vi byter till polära koordinater. I polära koordinater ges området av $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$. Jacobianen (funktionaldeterminanten) ges vid byte till polära koordinater av $d(x, y)/d(r, \theta) = r$. Variabelbytet ger därför integralen

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\right) d\theta = \pi \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]_0^2 = \pi \left(\frac{5^{3/2} - 1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1). \quad (1)$$

Svar: $\frac{\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$

Svar version B: $\frac{\pi}{3}(10\sqrt{10} - 1)$