Lösningar till Kontrollskrivning 2A, SF1646, CKEMV1/CBIOT1, VT09

Lösningarna till version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1) Eftersom mängden D är kompakt antas största och minsta värde antingen i en inre stationär punkt eller i en randpunkt. På randen gäller $|x| = 2$ eller $|y| = 2$ varför $4 - x^2$ eller $4 - y^2$ är $= 0$. Följaktligen är funktionen $= 0$ överallt på randen. Sök stationära punkter:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (4 - 2x - x^2)(4 - y^2)e^x = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y(4 - x^2)e^x = 0.$$

Eftersom $4 - y^2 \neq 0$ i det inre av D och $e^x \neq 0$, så ger den första ekvationen att $4 - 2x - x^2 = 0$. Alltså är $x = 1 \pm \sqrt{5}$. Då punkten skall ligga i D måste $|x| < 2$, så endast $x = \sqrt{5} - 1$ är möjligt. I det inre av D är $4 - x^2 \neq 0$ varför $y = 0$ är enda möjligheten enligt den andra ekvationen. Den enda stationära punkten i D är alltså $(\sqrt{5} - 1, 0)$. Nu är $f(\sqrt{5} - 1, 0) = 8(\sqrt{5} - 1)e^{\sqrt{5}-1} > 0$.

Svar: Minsta värde $= 0$ på hela randen till D och största värde $8(\sqrt{5} - 1)e^{\sqrt{5}-1}$ i $(\sqrt{5} - 1, 0)$.

Svar version B: Minsta värde $= 0$ på hela randen till D och största värde $18(\sqrt{10} - 1)e^{\sqrt{10}-1}$ i $(\sqrt{10} - 1, 0)$.

2) Vi beräknar integralen genom upprepad integration.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} 2xy + x^2y^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy^2 + \frac{1}{3}x^2y^3 \right]_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 4x^3 + \frac{8}{3}x^5\, dx = \left[x^4 + \frac{8}{18}x^6 \right]_0^1 = \frac{13}{9}.$$

Svar: $\frac{13}{9}$

Svar version B: $\frac{29}{21}$.

3) Vi byter till polära koordinater. I polära koordinater ges området av $1 \leq r \leq 2$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Funktionaldeterminanten $= r$. Vi får

$$I = \int_1^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r\cos\theta}{(r^2)^3} r\, d\theta \right) dr = \left(\int_1^2 \frac{dr}{r^4} \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \right)$$

$$= \left[-\frac{1}{3r^3} \right]_1^2 [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{7}{12}.$$

Svar: $\frac{7}{12}$.

Svar version B: $\frac{4}{3}$.