Lösningar till Kontrollskrivning 2A, SF1646, CKEMV1/CBIOT1, VT10

Lösningarna till version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1) Vi söker punkter där grad $f(x, y) = (0, 0)$. Detta ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1+y)(1+x)e^x = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^x = 0$$

Andra ekvationen ger $x = 0$, vilket insatt i första ekvationen ger $y = -1$. Alltså är $(0, -1)$ den enda stationära punkten. För att avgöra vilken typa av stationär punkt origo är beräknar vi andraderivatorna i $(0, -1)$. Detta ger

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)=(0,0)} = (1+y)(2+xe^x)|_{(x,y)=(0,-1)} = 0,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)} = (1+x)e^x|_{(x,y)=(0,-1)} = 1,$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

Vi bildar nu den kvadratiska formen $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = hk$. Vi ser att denna är indefinit, eftersom den antar både positiva och negativa värden, varför origo är en sadelpunkt.

Svar: Enda stationära punkten är $(0, -1)$ som är en sadelpunkt.

Svar version B: Enda stationära punkten är $(0, 1)$ som är en sadelpunkt.

2) Vi beräknar integralen genom upprepad integration.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2y} 1 - 4xy \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[x - 2x^2 y \right]_0^{2y} dy \\ &= \int_0^1 2y - 8y^3 \, dy = \left[y^2 - 2y^4 \right]_0^1 = -1. \end{aligned}$$

Svar: -1

Svar version B: 6.

3) Vi byter till polära koordinater. I polära koordinater ges området av $1 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Funktionaldeterminanten $= r$. Vi får

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} e^{2r^2} r \, d\theta \right) dr = 2\pi \int_1^3 r e^{2r^2} \, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} e^{2r^2} \right]_1^3 = \frac{\pi}{2}(e^{18} - e^2). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{2}(e^{18} - e^2)$.

Svar version B: $\frac{\pi}{3}(e^{12} - e^3)$.