Lösningar till Kontrollskrivning 3A, SF1646, K1/BIO1, VT08

Lösningarna på version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1) Vi byter till rymdpolära koordinater. Vi har då Jacobianen $r^2 \sin\theta$ och integralen blir

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 (r^2)^3 r^2 \sin\theta\, dr\right) d\,\theta\right) d\phi = \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^8\, dr\right)$$
$$= 2\pi \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{9}r^9\right]_0^1 = \frac{4\pi}{9}.$$

Svar: $\frac{4\pi}{9}$.

Svar version B: $\frac{4\pi}{7}$.

2) En parametrisering av kurvan γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$. Detta ger $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Nu är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (3t^2, t^2) \cdot (1, 2t) = 3t^2 + 2t^3.$$

Definitionen av kurvintegralen ger

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 3t^2 + 2t^3\, dt = \left[t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Svar: $\frac{3}{2}$

Svar version B: $\frac{4}{3}$

3) Vi ser att $x^2+y^2+z^2 = 4$ ger $z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2}$. Låt E vara mängen i xy-planet som ges av $x^2+y^2 \le 1$. Då ges D av $-\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$ och $(x, y) \in E$. Vi får

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(D) &= \iiint_D 1\, dxdydz = \iint_E \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dxdy \\ &= \iint_E 2\sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy.\end{aligned}$$

Byte till polära koordinater ger

$$\mathrm{vol}(D) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2\sqrt{4-r^2}\, r\, dr\right) d\theta = 2\pi\left[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}(4^{3/2} - 3^{3/2}).$$

Svar: $\frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$

Svar version B: $\frac{4\pi}{3}(27 - 8\sqrt{8})$