

## Lösningar till Kontrollskrivning 3A, SF1646, CKEMV1/CBIOT1, VT09

Lösningarna till version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1) En parametrisering av kurvan ges av  $(x(t), y(t)) = (t, 2t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Detta ger  $(x'(t), y'(t)) = (1, 2)$ . Definitionen av kurvintegral ger nu

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} 2x \, dx + (x + y) \, dy &= \int_0^1 2x(t)x'(t) + (x(t) + y(t))y'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 2t \cdot 1 + (t + 2t) \cdot 2 \, dt = \int_0^1 8t \, dt = 4. \end{aligned}$$

Svar: 4

Svar version B: 6

2) Upprepad integration ger integralen

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{x+y} z \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{x+y} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_0^2 (x+y)^2 dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{3}(x+y)^3 \right]_0^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (x+2)^3 - x^3 dx = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{4}(x+2)^4 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Svar:  $\frac{8}{3}$

Svar version B:  $\frac{8}{3}$

3) Om vi låter  $E = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$  ges området  $D$  av

$$D = \{(x, y, z); 2(x^2 + y^2) - 4 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2), (x, y) \in E\}.$$

Alltså ges volymen av

$$\text{Vol}(D) = \iiint_E \left( \int_{2(x^2+y^2)-4}^{4-2(x^2+y^2)} 1 \, dz \right) dx dy = \iint_E 8 - 4(x^2 + y^2) \, dx dy.$$

I denna integral byter vi till polära koordinater. I polära koordinater ges  $E$  av  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Vi får integralen

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (8 - 4r^2)r \, dr \right) d\theta = 2\pi [4r^2 - r^4]_0^1 = 6\pi.$$

Svar:  $6\pi$

Svar version B:  $6\pi$