Lösningar till Kontrollskrivning 3A, SF1646, CKEMV1/CBIOT1, VT09

Lösningarna till version B av kontrollskrivningen är snarlika varför endast svar ges.

1) En parametrisering av kurvan ges av $\mathbf{r}(t) = (t, 1+2t)$, $0 \le t \le 1$. Detta ger $\mathbf{r}'(t) = (1, 2)$. Definitionen av kurvintegral ger nu

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (t - (1+2t), t^2) \cdot (1, 2) dt \\ &= \int_0^1 2t^2 - t - 1\, dt = -5/6.\end{aligned}$$

Svar: $-5/6$

Svar version B: $2/3$

2) Vi byter till rymdpolära koordinater. I rymdpolära koordinater ges Ω av $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le \pi$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$. Jacobianen är $r^2 \sin\theta$. Integralen blir då

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^3 \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta \right) d\phi = \\ &= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^3 dr \right) = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi\end{aligned}$$

Svar: 6π

Svar version B: 4π

3) Om vi låter $D = \{(x, y) \,;\, 9x^2 + y^2 \le 1\}$ ges området Ω av

$$\Omega = \{(x, y, z) \,;\, 9x^2 + y^2 \le z \le 1 \,,\, (x, y) \in D\}.$$

Alltså ges volymen av

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_E \left(\int_{9x^2+y^2}^1 1\, dz \right) dxdy = \iint_E 1 - (9x^2 + y^2)\, dxdy.$$

I denna integral byter vi till elliptisk-polära koordinater, $x = \frac{1}{3} r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$. I de nya koordinaterna ges D av $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Vi får integralen

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2) \frac{1}{3} r\, dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi/6.$$

Svar: $\pi/6$

Svar version B: $\pi/8$