Institutionen för matematik, KTH
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Tisdagen 13/4 2004, kl. 14.00-19.00

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar i punkten $a \in \mathbb{R}^n$. (2p)

   (b) Visa att om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar i $a \in \mathbb{R}^n$ så är f kontinuerlig i a. (2p)

2. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara C^1 i en omgivning av $(0, 0)$. Sätt
$$\phi(x, y) = (x + x^2 f(x, y), y + y^2 g(x, y)).$$
   Visa att ϕ är inverterbar i en omgivning av $(0, 0)$ och bestäm inversens totala derivata i $(0, 0)$. (4p)

3. Beräkna största avståndet från en punkt på ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ till planet $x + y + z = 4$. (Ledning: Avståndet från punkten (x_0, y_0, z_0) till planet $ax + by + cz + d = 0$ ges av $(a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2}|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$.) (5p)

4. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytan $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4z$ och planet $x + y + z = 6$. (5p)

5. Låt $\mathcal{C}_r$ vara en cirkel med radien r och centrum i origo tagen ett varv i positiv led. Sätt
$$I(r) = \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(y-1)dx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$
   Beräkna $I(1)$ och $I(4)$. (5p)

6. Det *sfäriska avståndet* mellan två punkter P och Q på enhetssfären definieras som längden av den kortare av de två storcirkelbågarna mellan P och Q. Storcirkeln genom P och Q är skärningen mellan sfären och planet genom P, Q och origo. Den *sfäriska cirkelskivan* med radie r och centrum i punkten P på sfären är alla punkter Q på sfären med sfäriskt avstånd $\leq r$ till P. Låt $A(r)$ beteckna arean av denna sfäriska cirkelskiva. Visa att

$$\lim_{r\to 0+} \frac{12}{\pi} r^{-4}(\pi r^2 - A(r)) = 1. \qquad (5p)$$

7. Låt Ω vara ett öppet, begränsat område i $\mathbb{R}^3$ med reguljär rand $\partial\Omega$ vars yttre enhetsnormal är $\mathbf{N}$, och låt $\mathbf{F}$ vara ett C^1 vektorfält på $\overline{\Omega}$. Visa att

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{N} \times \mathbf{F} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{F} dV.$$

Integralerna är vektorvärda och definieras genom komponentvis integration. (Ledning: Betrakta varje komponent för sig.) (5p)

8. Låt $\mathbf{r} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ vara en C^3 kurva i planet parametriserad med avseende på båglängen s och låt $\mathbf{T}(s)$ vara enhetstangenten. Antag att krökningen

$$\kappa(s) = ||\frac{d\mathbf{T}}{ds}|| > 0,$$

och låt $\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{T}}{ds}$.

a) Visa att $\mathbf{N}$ är ortogonal mot $\mathbf{T}$, så att $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ är en ortonormerad bas i punkten $\mathbf{r}(s)$ (1p)

b) Visa direkt, utan att använda Frenet-Serrets formler, att

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{T}.$$

(Ledning: Derivera $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ och $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$.) (3p)

9. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara harmonisk i $\mathbb{R}^2$, dvs. $\Delta f = 0$, och låt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara två C^2 funktioner som uppfyller $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\mathbb{R}^2$. Visa att $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ är harmonisk i $\mathbb{R}^2$. (5p)

LYCKA TILL!