Institutionen för matematik, KTH
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Fredagen 19/5 2006 kl. 8-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42 p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. Bestäm ett öppet intervall (b, c) så att funktionen
$$f(x, y) = 4x^3 + ax^2y + xy^2 + 4ax^2 + a^2xy + ay^2$$
har ett lokalt minimum i origo om $a \in (b, c)$. (5p)

2. Låt f och g vara två C^1 funktioner på $\mathbf{R}$ sådana att $f(1) = g(1) = 0$. Ge ett villkor på funktionerna f och g så att man ur ekvationssystemet
$$\begin{cases} f(xy) + g(yz) = 0 \\ g(xy) + f(yz) = 0 \end{cases}$$
kan lösa ut y och z som funktioner av x i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$. (5p)

3. Beräkna integralen
$$\iint_D \sqrt{y - x^2}\,dxdy,$$
om $D = \{(x, y)\,;\, x^2 \leq y \leq 1\}$. (5p)

4. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + z^3/3, 2xyz + yz, xy^2 + xz^2 + y^2/2)$. Visa att kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av valet av väg C från $(0, 0, 0)$ till $(1, 1, 1)$ och beräkna integralens värde. (5p)

5. En kurva har parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Visa att båglängden mellan två punkter på kurvan är proportionell mot skillnaden mellan punkternas avstånd till origo och ange proportionalitetskonstanten. (5p)

6. Låt f och g vara C^1 funktioner i en omgivning av $\bar{\Omega}$, där Ω är ett öppet område i $\mathbb{R}^3$ med reguljär rand $\partial\Omega$. Låt $\mathbf{n}$ vara den yttre enhetsnormalen till $\partial\Omega$ och låt $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ beteckna den riktade derivatan av f i riktningen $\mathbf{n}$ i punkter på $\partial\Omega$. Visa att

$$\iiint_{\Omega} f\Delta g - g\Delta f dV = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

(5p)

7. Låt f vara en kontinuerlig funktion på positiva reella axeln. Visa att

$$\iint_{S_R} f(x^2 + y^2 + (z-c)^2) dS = \frac{\pi R}{c} \int_{(R-c)^2}^{(R+c)^2} f(s) ds,$$

där $c > 0$ är en konstant och S_R är sfären med radie R och centrum i origo. (6p)

8. Låt $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, D ett öppet område i $\mathbb{R}^2$, vara en reguljär parametrisering av ytan S, och låt $g : A \to D$, A ett öppet område i $\mathbb{R}^2$, vara en C^1 bijektion, $(u, v) = g(s, t)$. Sätt $\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{r}(g(s, t))$, $(s, t) \in A$, så att $\mathbf{R}$ är en annan parametrisering av ytan S.

(a) Visa att

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)},$$

där $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ beräknas i $(u(s, t), v(s, t))$. (3p)

(b) Låt f vara en kontinuerlig funktion på S. Definiera ytintegralen $\iint_S f dS$. (1p)

(c) Visa att definitionen av ytintegralen är oberoende av valet av parametrisering, det vill säga att de båda parametriseringarna $\mathbf{r}$ och $\mathbf{R}$ av S ger samma värde på integralen. (2p)

LYCKA TILL!