KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Måndagen 21/8 2006 kl. 8-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42 p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. Låt f vara en C^1 funktion i den öppna mängden Ω i $\mathbb{R}^n$.

   a) Definiera vad som menas med att f har ett lokalt extremvärde i $a \in \Omega$. (1p)

   b) Definiera vad som menas med att f har en kritisk punkt i $a \in \Omega$. (1p)

   c) Visa att om f har ett lokalt extremvärde i $a \in \Omega$ så är a en kritisk punkt till f. (3p)

   d) Gäller omvändningen till implikationen i c)? (1p)

2. Låt $f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{x^2+2y^2}$ om $(x,y) \neq (0,0)$.

   a) Visa att f kan definieras i origo så att f blir kontinuerlig där. (2p)

   b) Är f differentierbar i origo om den definieras med hjälp av kontinuitet i origo? (3p)

3. Bestäm arean av den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$. (5p)

4. Betrakta variabelbytet

$$x = u \cosh v \quad , \quad y = u \sinh v. \tag{1}$$

v.g.v.

a) Vilket område i uv-planet svarar mot området $x > |y| > 0$ i xy-planet? (2p)

b) I C^1 funktionen $w = f(x, y)$ gör vi variabelbytet (1). Visa att

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2.$$

(3p)

5. Låt a_i, $1 \leq i \leq n$, vara konstanter som inte alla är $= 0$. Använd Lagrangemultiplikatorer för att bestämma största värdet av $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ om $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. (5p)

6. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} dy$$

där C är ellipsen $x^2 + 3y^2 = 1$ tagen i positiv led. (5p)

7. Låt C vara en enkel, plan, sluten kurva i rummet. Låt $\mathbf{n} = (a, b, c)$ vara en enhetsnormal till planet som innehåller kurvan och låt C vara positivt orienterad med avseende på $\mathbf{n}$. Visa att kurvintegralen

$$\int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$$

ger arean av området inneslutet av C i planet. (5p)

8. Låt f vara en C^2 funktion i en öppen omgivning Ω till det slutna reguljära området R i $\mathbb{R}^3$ och låt $\mathbf{n}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till ∂R.

(a) Antag att f är harmonisk i R. Visa att

$$\int_{\partial R} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_R |\nabla f|^2 dV,$$

där $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ betecknar den riktade derivatan av f i riktningen $\mathbf{n}$. (3p)

(b) Antag att f är harmonisk i R och att f är identiskt $= 0$ på ∂R. Visa att då är f identiskt $= 0$ i hela R. (3p)

LYCKA TILL!