KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Fredagen 25/5 2007 kl. 8-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42 p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. Beräkna volymen av den kropp i $\mathbb{R}^3$ som definieras av $x, y, z \geq 0$ och $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1$. (5p)

2. Har vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x \cos y, -\sin y, \sin x)$ en vektorpotential? Bestäm i så fall en sådan. (5p)

3. Använd Lagrangemultiplikatorer för att bestämma minimum av $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ då $x, y, z > 0$ och $x^\alpha y^\beta z^\gamma = 1$, där α, β, γ är positiva konstanter.

   (5p)

4. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en C^1-funktion.

   a) Ange ett tillräckligt villkor för att vi ur $F(x, y, z) = 0$ ska kunna lösa $x = \phi_1(y, z)$, $y = \phi_2(z, x)$ och $z = \phi_3(x, y)$ i en omgivning av (x_0, y_0, z_0) för några C^1 funktioner ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. (2p)

   b) Visa att
   $$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = -1.$$

   (3p)

v.g.v.

5. a) Definiera arean av en parametriserad yta $(u, v) \to \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, där $\mathbf{r}$ är C^1. (1p)

b) Använd denna definition för att visa att arean A av den yta som erhålls då $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, roterar runt y-axeln är

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Vi antar att f är kontinuerligt deriverbar. (4p)

6. Låt S vara en reguljär yta med randkurva ∂S och enhetsnormalvektorfält $\mathbf{n}$. Antag att ∂S har den orientering som ges av $\mathbf{n}$. Låt vidare $\mathbf{v}$ vara en fix vektor i $\mathbb{R}^3$. Visa att

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \mathbf{v} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s},$$

där $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

(5p)

7. a) Härled en differentialekvation för C^2-funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ om $u(x, y, z) = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, satisfierar ekvationen $\Delta u = 0$. (4p)

b) Antag att u är definierad i $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Bestäm alla lösningar till $\Delta u = 0$ av formen $u(x, y, z) = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, det vill säga alla rotationssymmetriska lösningar. (2p)

8. Låt B vara ett öppet klot i $\mathbb{R}^3$, ∂B dess randyta och $\mathbf{n}$ den yttre enhetsnormalen på ∂S.

a) Antag att $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är C^1 vektorfält i B och att $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ i B. Visa att det finns en funktion $f : B \to \mathbb{R}$ så att $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \nabla f$ i B. (2p)

b) Antag att $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är C^1 vektorfält i en omgivning av det slutna klotet $\bar{B}$ och att $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ i B, $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G}$ i B samt $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$ på ∂B. Visa att då gäller $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ i B. (4p)

LYCKA TILL!