KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Tisdagen 28/8 2007 kl. 14-19

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42 p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. I den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
gör vi variabelbytet $s = e^x + e^y$, $t = e^{-x} + e^{-y}$. Härled den partiella differentialekvation vi får i de nya variablerna. (5p)

2. Beräkna integralen
$$\iint_{[0,\infty)^2} e^{-x^4-y^4} xy\, dxdy.$$
(5p)

3. Bestäm den maximala krökningen för skärningskurvan mellan planet $y = x - 1$ och ytan $z = 2x^2 + y^2 - 2xy$.
Ledning: En slät kurva med parameterframställningen $\mathbf{r}(t)$ har krökningen $\kappa(t) = |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|/|\mathbf{r}'(t)|^3$ i $\mathbf{r}(t)$.
(5p)

4. a) Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en öppen mängd och C en kurva från punkten P till punkten Q i Ω. Visa att om $\mathbf{F}$ är ett konservativt C^1 vektorfält i Ω så är kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ oberoende av valet av kurvan C mellan P och Q. (3p)

v.g.v.

b) Låt S vara en slät randyta till ett område Ω i $\mathbb{R}^3$. Antag att C^1 vektorfältet $\mathbf{F}$ är sådant att $\mathbf{F}$ i varje punkt ligger i tangentplanet till ytan. Visa att

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV = 0.$$

(3p)

5. Visa identiteten

$$\nabla \cdot (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h),$$

där f, g, h är C^2 skalära funktioner i $\mathbb{R}^3$.

(5p)

6. Låt Ω vara ett område i $\mathbb{R}^2$ med slät randkurva $\partial\Omega$, och låt $(x, y) \to F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ vara en C^2 bijektion i $\overline{\Omega}$ vars Jacobian är positiv. Låt vidare $F(\Omega)$ beteckna bilden av Ω under avbildningen F. Visa att

$$\text{area}\, F(\Omega) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}dx + u\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

(5p)

7. Låt S vara en yta i $\mathbb{R}^3$ vars ekvation är $g(x, y, z) = 0$ där g är en C^1 funktion som uppfyller $\nabla g \neq 0$ på S. Visa att om avståndet från en fix punkt P utanför S till en punkt Q på S har lokalt extremvärde i $Q = Q_0$ så är $\overline{PQ_0}$ en normalvektor till S i Q_0.

(5p)

8. Visa att om $c < a^2 + b^2$ så går genom den fixa punkten (a, b, c) oändligt många tangentplan till ytan $z = x^2 + y^2$. Visa vidare att dessas tangeringspunkter ligger i ett plan och ange detta plans ekvation.

(6p)

LYCKA TILL!