Institutionen för matematik, KTH
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN 5B1138
Reell analys II för F1
Måndagen 25/4 2005, kl. 8-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Maximal poäng på hela provet är 42p. Utöver detta kan du ha upp till 4 bonuspoäng. 21 p ger säkert godkänt (betyg 3), 28 p ger säkert betyg 4 och 35 p ger säkert betyg 5 , inklusive bonuspoäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har alla partiella derivator i punkten $a \in \mathbb{R}^n$. (2p)

   (b) Ge ett exempel på en begränsad funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, vars båda partiella derivator i $(0,0)$ existerar men som inte är kontinuerlig i origo. (3p)

2. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ i området $2x^2 + y^2 \leq 1$. (5p)

3. Bestäm en skalär funktion $f(z)$ sådan att vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(z)(2xz, 2yz, z^2 - x^2 - y^2)$$

   är konservativt i $D = \{(x,y,z)\,;\, z > 0\}$ och bestäm en potential. Beräkna kurvintegralen av det vektorfält $\mathbf{F}$ du får längs en kurva i D från $(1,0,1)$ till $(1,1,2)$. (5p)

4. Beräkna integralen

$$\iint_D (1 + ax^2 + by^2)^{-2} dxdy$$

   om $D = \{(x,y)\,;\, ax^2 + by^2 \leq 1\}$ och a, b är positiva konstanter. (5p)

5. Låt $\mathbf{N}$ vara den uppåtpekande normalen till paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xz^2, x^2y)$. Beräkna

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

över den del $\mathcal{S}$ av paraboloiden där $x \geq 0$ och $z \geq 0$. (5p)

6. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara en C^2 funktion sådan att $||\operatorname{grad} f||^2 = 4f$, $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} f) = 10f$ och $f(x) \neq 0$ för alla x. Beräkna integralen

$$\int_{\mathcal{S}} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \, dS$$

om $\mathcal{S}$ är sfären $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. (5p)

7. Antag att vektorfältet $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är C^2 och att

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - k^2 \mathbf{A} = 0$$

i hela $\mathbb{R}^3$, där $k \neq 0$ är en konstant.

(a) Visa att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (2p)

(b) Visa att $\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$. (Ekvationen ska uppfattas komponentvis.) Ledning: Betrakta varje komponent för sig. (4p)

8. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara sådan att

$$f(x) = f(0) + Q(x) + ||x||^2 R(x),$$

för x i en omgivning av 0, där $Q(x)$ är en positivt definit kvadratisk form och $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uppfyller $R(x) \to 0$ då $x \to 0$. Visa att f har ett lokalt minimum i 0.

(6p)

LYCKA TILL!