Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2004-04-13

1) a) Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar i punkten $a \in \mathbb{R}^n$ om det finns en $m \times n$-matris A sådan att $f(a+h) - f(a) = Ah + R(h)$ där $||R(h)||/||h|| \to 0$ då $||h|| \to 0$.

b) Antag att f är differentierbar i a. Då gäller $||f(a+h) - f(a)|| = ||Ah + R(h)|| \leq ||A||||h|| + ||R(h)||$ som går mot 0 då $||h|| \to 0$ eftersom $||R(h)||/||h|| \to 0$. Detta visar att f är kontinuerlig i a.

2) I (x, y) har ϕ den totala derivatan

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + 2xf(x,y) + x^2\frac{\partial f}{\partial x} & x^2\frac{\partial f}{\partial y} \\ y^2\frac{\partial f}{\partial x} & 1 + 2yg(x,y) + y^2\frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Alltså är $\phi'(0,0) = I$, identitetsmatrisen, och är inverterbar. Inversa funktionssatsen ger att ϕ är inverterbar i en omgivning av $(0,0)$. Vi har också att

$$(\phi^{-1})'(0,0) = (\phi^{-1})'(\phi(0,0)) = (\phi'(0,0))^{-1} = I.$$

Svar: Inversens totala derivata i origo är I.

3) Avståndet från punkten (x,y,z) till planet $x+y+z-4 = 0$ ges av $|x+y+z-4|/\sqrt{3}$. Vi vill alltså maximera $f(x,y,z) = (x+y+z-4)^2/3$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2+2y^2+4z^2-1 = 0$. Observera att $g'(x,y,z) = (2x \;\; 4y \;\; 8z)$ har maximal rang $= 1$ på hela ellipsoiden. Extrempunkten är därför en kritisk punkt till Lagrangefunktionen vilket ger ekvationerna $\frac{2}{3}(x+y+z-4) - 2x\lambda = 0$, $\frac{2}{3}(x+y+z-4) - 4y\lambda = 0$, $\frac{2}{3}(x+y+z-4) - 8z\lambda = 0$. Om $\lambda = 0$ får vi $x+y+z = 4$, dvs. en punkt i planet vilket inte kan ge maximalt avstånd. Alltså är $\lambda \neq 0$ och ekvationssystemet ger $x = 2y = 4z$. Insatt i bivillkoret ger detta $z = \pm 1/2\sqrt{7}$. Vi får två kritiska punkter $\pm(2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/2\sqrt{7})$ och vi ser att största avståndet ges av $|-2/\sqrt{7} - 1/\sqrt{7} - 1/2\sqrt{7} - 4|/\sqrt{3} = (8+\sqrt{7})/2\sqrt{3}$.

Svar: Största värdet är $(8+\sqrt{7})/2\sqrt{3}$.

4) Planet skär ytan då $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4(6-x-y)$, dvs. då $x^2+y^2 = 16$. Sätter vi $D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \leq 16\}$ blir volymen

$$\iint_D \left(6 - x - y - \frac{(x-2)^2 + (y-2)^2}{4}\right) dxdy = \frac{1}{4}\iint_D (16 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Inför vi polära koordinater får vi

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (16 - r^2) r dr\right) d\theta = 14\pi.$$

Svar: Volymen är 14π.

5) Sätt $F_1(x,y) = \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $F_2(x,y) = -\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$. Då gäller, om $(x,y) \neq (1,1)$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{(x-1)^2-(y-1)^2}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Eftersom (F_1, F_2) är C^1 innanför $\mathcal{C}_1$ så ger Greens formel att

$$\int_{\mathcal{C}_1} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Låt Γ vara en cirkel med radie 1 kring $(1,1)$. (F_1, F_2) är C^1 i området mellan Γ och $\mathcal{C}_4$ och på dessa kurvor. Greens formel tillämpad på detta område ger

$$\int_{\mathcal{C}_4} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy.$$

Parametrisera Γ genom $x = 1+\cos\theta$, $y = 1+\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi får

$$\int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy = \int_0^{2\pi} (\sin\theta, -\cos\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta) d\theta = -2\pi.$$

Svar: $I(1) = 0$ och $I(2) = -2\pi$.

6) Utan inskränkning kan vi placera centrum för den sfäriska cirkelskivan i nordpolen. I sfäriska koordinater, $x = \cos\theta\sin\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\phi$, beskrivs den då av $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq r$, eftersom avståndet från nordpolen till (x,y,z) är precis ϕ (båglängd på storcirkeln). Areaelementet i sfäriska koordinater ges av $\sin\phi d\theta d\phi$, varför

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sin\phi d\theta \right) d\phi = 2\pi \int_0^r \sin\phi d\phi \\ &= 2\pi(1-\cos r). \end{aligned}$$

MacLaurinutveckling av $\cos r$ ger $\cos r = 1 - r^2/2 + r^4/24 + O(r^6)$. Alltså är

$$A(r) = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{24} + O(r^6) \right) = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} + O(r^6),$$

vilket ger $\frac{12}{\pi} r^{-4}(\pi r^2 - A(r)) = 1 + O(r^2)$, och det sökta gränsvärdet följer.

7) Låt $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ och $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Då är

$$\mathbf{N} \times \mathbf{F} = (N_2F_3 - N_3F_2, N_3F_1 - N_1F_3, N_1F_2 - N_2F_1).$$

De tre komponenterna kan skrivas $(0, F_3, -F_2)\cdot\mathbf{N}$, $(-F_3, 0, F_1)\cdot\mathbf{N}$ resp. $(-F_1, F_2, 0)\cdot\mathbf{N}$. Observera att $(\operatorname{div}(0, F_3, -F_2), \operatorname{div}(-F_3, 0, F_1), \operatorname{div}(-F_1, F_2, 0)) = \operatorname{curl}\mathbf{F}$. Använder vi nu Gauss' sats på varje komponent ser vi att

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{N}\times\mathbf{F}dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{curl}\mathbf{F}dV.$$

(Se också Adams s. 971.).

8) a) Derivering av $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ m.a.p. s ger $2\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$, vilket ger $\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = 0$, dvs. $\mathbf{N}$ är ortogonal mot $\mathbf{T}$.

b) Derivering av definitionen av $\mathbf{N}$ ger

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}\mathbf{N} + \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2}. \tag{1}$$

Eftersom $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ är en ON-bas gäller

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = (\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds})\mathbf{T} + (\mathbf{N}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds})\mathbf{N}. \tag{2}$$

Derivering av $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = 1$ ger $\mathbf{N}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$. Det följer från (1) att

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}\cdot\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2}. \tag{3}$$

Derivering av $\frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{T} = 0$ ger $||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||^2 + \mathbf{T}\cdot\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2} = 0$ eller $\mathbf{T}\cdot\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2} = -\kappa(s)^2$ enligt definitionen av krökningen. Formeln (3) ger $\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa(s)$, och av (2) följer nu den sökta formeln.

9) Vi använder kedjeregeln

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Derivering en gång till ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

På samma sätt

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Addition ger

$$\Delta g = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\Delta f + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v \tag{4}$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right].$$

Av $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ följer

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Dessutom följer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dvs. $\Delta u = 0$. På samma sätt visas $\Delta v = 0$. Vi har dessutom antagit att $\Delta f = 0$. Alltså är högra ledet i (4) $= 0$, dvs. $\Delta g = 0$.