Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2005-08-27

1) a) Vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt i Ω om det finns en C^1 funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ sådan att $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi$.

b) Om $\mathbf{F}$ är konservativt finns $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ så att $F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$, $F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$. Eftersom $\mathbf{F}$ är C^1 är ϕ C^2 och

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}.$$

Svar: Ett nödvändigt villkor för ett konservativt vektorfält är $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$.

c) Vektorfältet är ej konservativt. Låt $\mathcal{C}$ vara enhetscirkeln tagen ett varv i positiv led. Om $\mathbf{F}$ vore konservativt i hela $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ så skulle $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, eftersom $\mathcal{C}$ är en sluten kurva. Men

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi.$$

Denna motsägelse visar att $\mathbf{F}$ ej är konservativt.

2) a) Se boken s. 503.

b) Punkterna $(\pm 1, \pm 2)$ måste ligga på ellipsen vilket ger bivillkoret $1/a^2 + 4/b^2 = 1$ och problemet är att minimera πab under detta bivillkor. Bilda Lagrangefunktionen $L(a, b, \lambda) = \pi ab - \lambda(1/a^2 + 4/b^2)$. Att de partiella derivatorna med avseende på a och b ska vara $= 0$ ger ekvationerna $\pi b + 2\lambda/a^3 = 0$ och $\pi a + 8\lambda/b^3 = 0$. Det följer att $4\pi a^3 b = -8\lambda = \pi a b^3$, dvs. $4a^2 = b^2$. Alltså är $b = 2a$ eftersom a och b båda är positiva. Bivillkoret ger nu $2/a^2 = 1$, dvs. $a = \sqrt{2}$. Den minimala arean är $\pi\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi$.

Svar: 4π.

3) Sätt $F(x, y, z) = x+y+z-f(x^3+y^3+z^3)$. Vi vill visa att $\partial F/\partial z \neq 0$ för alla (x, y, z) som uppfyller (1). Slutsatsen följer då av implicita funktionssatsen. Derivering ger

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - f'(x^3 + y^3 + z^3) \cdot 3z^2.$$

Kala högra ledet för A. Då f är strikt avtagande gäller $f' \leq 0$, varför $\partial F/\partial z \geq 1$, ty $z^2 \geq 0$. Derivering av (1) m.a.p. x och y ger

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^3 + y^3 + z^3)(3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x})$$

$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^3 + y^3 + z^3)(3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y})$$

varur

$$(*) \quad A\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 f'(x^3+y^3+z^3) - 1$$

$$(**) \quad A\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 f'(x^3+y^3+z^3) - 1.$$

Multiplicera båda ekvationerna med z^2 och substituera $3z^2 f'(x^3+y^3+z^3) = 1-A$. Detta ger

$$Az^2\frac{\partial z}{\partial x} = x^2(1-A) - z^2 \quad , \quad Az^2\frac{\partial z}{\partial y} = y^2(1-A) - z^2.$$

Subtraktion ger $Az^2(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}) = (y^2 - x^2)(1-A)$. Multiplicera $(*)$ med y^2 och $(**)$ med x^2 och subtrahera. Detta ger $A(y^2\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y}) = -y^2 + x^2$. Adderar vi dessa ekvationer och dividerar med $A \geq 1$, så får vi den sökta ekvationen.

4) Inför nya koordinater $u = y + x$, $v = y - x$. I de nya koordinaterna blir D området $|u| \leq a$, $|v| \leq a$. Jacobianen är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1/2.$$

Integralen blir

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^u du\right) dv = a(e^a - e^{-a}).$$

Svar: $a(e^a - e^{-a})$.

5) Vi utnyttjar identiteten $\nabla \times (\phi\nabla\psi) = \phi\nabla \times (\nabla\phi) + \nabla\phi \times \nabla\psi = \nabla\phi \times \nabla\psi$ eftersom $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$. Då $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är konservativa så finns potentialer ϕ och ψ så att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ och $\mathbf{G} = \nabla\psi$. Identiteten ger $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \nabla\phi \times \nabla\psi = \nabla \times (\phi\nabla\psi)$, så att $\phi\nabla\psi$ är en vektorpotential till $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ och $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \cdot (\nabla \times (\phi\nabla\psi)) = 0$ eftersom div(curl)=0.

6) Flödet genom ytan $\mathcal{S}$ med utåriktad normal $\mathbf{N}$ ges av

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

där likheten är Gauss' sats. Högerledet är

$$\iiint_K (4 + 6x^2z - x^2 - z^2 - 6x^2z - 4y^2)dxdydz = \iiint_K (4 - x^2 - 4y^2 - z^2)dxdydz.$$

För att denna integral skall bli maximal ska vi välja K så att integranden är ≥ 0 i K och < 0 utanför K, dvs. $K = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Svar: $\mathcal{S}$ ska väljas som ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

7) Krökningen definieras av $\kappa(s) = ||d\mathbf{T}/ds||$, där $\mathbf{T}$ är enhetstangenten till kurvan. Om $\kappa(s) = 0$ är alltså $d\mathbf{T}/ds = 0$, dvs. enhetstangenten är konstant $= \mathbf{v}$. Om $\mathbf{r}(s)$ är parametriseringen av kurvan m.a.p. båglängden är $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T} = \mathbf{v}$. Det följer att $\mathbf{r}(s) = \mathbf{v}s + \mathbf{u}$, där $\mathbf{u}$ är en fix vektor. Detta är parametriseringen av en rät linje genom $\mathbf{u}$ med riktningsvektor $\mathbf{v}$.

8) Enligt Gauss' sats är

$$\iint_{S(a,r)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_{\bar{B}(a,r)} \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

där $\bar{B}(a,r)$ är slutna bollen med centrum i a och radie r. Eftersom $\mathbf{F}$ är C^1 i en omgivning av a, så är $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en kontinuerlig funktion i $\bar{B}(a,r)$ om r är tillräckligt liten. Sätt

$$M(r) = \sup_{x \in \bar{B}(a,r)} \operatorname{div} \mathbf{F}(x)$$

$$m(r) = \inf_{x \in \bar{B}(a,r)} \operatorname{div} \mathbf{F}(x).$$

Dessa värden antas i några punkter b resp. c i $\bar{B}(a,r)$ eftersom $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är kontinuerlig i den kompakta mängden $\bar{B}(a,r)$. Av kontinuiteten följer också att $M(r) = \operatorname{div} \mathbf{F}(b) \to \operatorname{div} \mathbf{F}(a)$ då $r \to 0+$ eftersom $b \to a$ då $r \to 0+$. Vi får på samma sätt att $m(r) \to \operatorname{div} \mathbf{F}(a)$. Alltså

$$m(r) \text{vol}\,(\bar{B}(a,r)) \leq \iiint_{\bar{B}(a,r)} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \leq M(r) \text{vol}\,(\bar{B}(a,r))$$

eller

$$m(r) \leq \frac{1}{4\pi r^3/3} \iint_{S(a,r)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS \leq M(r).$$

Resultatet följer nu av instängningssatsen för gränsvärden.