Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2006-08-21

1) a) Punkten a är ett lokalt maximum eller ett lokalt minimum. Se boken för definitionen av dessa.

b) $\nabla f(a) = 0$.

c) Om f har ett lokalt extremvärde i a så har $g(t) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ ett lokalt extremvärde i $t = a_k$. Då gäller enligt känd sats att $g'(a_k) = 0$, dvs. $\frac{\partial f}{\partial a_k}(a) = 0$. Då detta k var godtycligt får vi $\nabla f(a) = 0$ dvs. a är en kritisk punkt.

d) Nej, a kan vara en sadelpunkt, t. ex. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ i origo.

2) a) Vi använder polära koordinater, vilket ger

$$\left|\frac{(x+y)^3}{x^2+2y^2}\right| = \left|r\frac{(\cos\theta + \sin\theta)^3}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}\right| \leq r\frac{(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^3}{1+\sin^2\theta} \leq 8r$$

eftersom $|\cos\theta| \leq 1$ och $|\sin\theta| \leq 1$. Vi ser att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+2y^2} = 0$$

eftersom $r \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Sätter vi $f(0,0) = 0$ så blir f kontinuerlig i origo.

Svar: $f(0,0) = 0$

b) Vi undersöker först om de partiella derivatorna i $(0,0)$ existerar,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h/2}{h} = 1/2.$$

Sätt

$$r(h_1,h_2) = f(h_1,h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = \frac{\frac{5}{2}h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2}{h_1^2 + 2h_2^2}.$$

Att f är differentierbar i origo innebär att

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0. \tag{1}$$

Väljer vi $h_1 = h_2 = h$ ser vi att $r(h,h)/\sqrt{2h^2} = 7/6\sqrt{2} \neq 0$. Alltså är (1) ej uppfyllt och vi har visat att f ej är differentierbar i origo

Svar: f är ej differentierbar i origo.

3) Ytan är en funktionsyta $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ där $(x, y) \in D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Arean ges av

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy.$$

Övergång till polära koordinater ger

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Svar: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

4) a) Vi har att $x^2 - y^2 = u^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v) = u^2$. Alltså är $u = \sqrt{x^2 - y^2}$, där vi måste ta den positiva roten eftersom $x > 0$. Vi har också

$$\frac{x}{y} = \frac{\cosh v}{\sinh v} = \frac{e^{2v} + 1}{e^{2v} - 1}$$

vilket ger $v = \frac{1}{2} \ln(\frac{x/y+1}{x/y-1})$, som är väldefinierat om $x > |y| > 0$. Vi ser att variabelbytet ger en bijektion från $\{x > |y| > 0\}$ till $\{u > 0\}$.

Svar: Bilden blir högra halvplanet $u > 0$.

b) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cosh v + \frac{\partial w}{\partial y}\sinh v,$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}u\sinh v + \frac{\partial w}{\partial y}u\cosh v.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 &= \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right](\cosh^2 v - \sinh^2 v) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

eftersom $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$.

5) Lagrangefunktionen blir $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$ och vi söker dess kritiska punkter,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = a_i - 2\lambda x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Om $\lambda = 0$ får vi $a_i = 0$ för alla i vilket ej är fallet. Alltså är $\lambda \neq 0$ och vi får den kritiska punkten $x_i = a_i/2\lambda$, $i = 1, \ldots, n$. Insatt i bivillkoret $G(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ ger detta $\lambda = \pm\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$. Observera att $G'(x) = (2x_1 \ldots 2x_n)$ som har rang $= 1$ om $G(x) = 1$ så rangvillkoret är uppfyllt. Största värdet antas alltså i

$$x_i = a_i/\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2},$$

$i = 1, \ldots, n$. Största värdet blir då $(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$.

Svar: $(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$.

6) Vi har vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Observera att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{3y^2x^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

om $(x,y) \neq (0,0)$. Om Γ är kurvan $x^2 + y^2 = 1$ tagen ett varv i positiv led så ger Greens formel att

$$I = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_\Gamma F_1 dx + F_2 dy.$$

Parametrisera Γ genom $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi får

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sin^3\theta(-\sin\theta) - \cos\theta \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

Svar: $-\pi$.

7) Låt S vara den yta i planet som innesluts av C. Skriver vi $\mathbf{F} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$ har vi alltså integralen $\frac{1}{2}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Enligt Stokes' sats är denna integral lika med ytintegralen $\frac{1}{2}\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. En räkning ger $\nabla \times \mathbf{F} = (a+a, b+b, c+c) = 2\mathbf{n}$. Eftersom $\mathbf{n}$ är en enhetsvektor, så är ytintegralen lika med $\iint_S dS = \text{area}(S)$.

8) a) Enligt Gauss' sats gäller

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS &= \int_{\partial R} f \nabla f \cdot \mathbf{n} dS = \int_R \nabla \cdot (f \nabla f) dV \\ &= \int_R \nabla \cdot f + \nabla \cdot (\nabla f) dV = \int_R |\nabla f|^2 dV \end{aligned}$$

eftersom $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f = 0$ då f är harmonisk.

b) Om f är identiskt noll på ∂R så ger identiteten i a) att

$$\int_R |\nabla f|^2 dV = \int_{\partial R} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Eftersom $|\nabla f|^2$ är kontinuerlig så gäller $\nabla f = 0$ i det inre av R. Alltså är f konstant i det inre av R, och eftersom f är kontinuerlig i hela den slutna mängden R och lika med noll på ∂R, så måste denna konstant vara lika med noll. Alltså är f identiskt noll i hela R.