Lösningar till Tentamen i 5B1138 Reell analys II 2007-08-28

1) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial s} + \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= s\frac{\partial z}{\partial s} - t\frac{\partial z}{\partial t}\end{aligned}$$

Svar: $s\frac{\partial z}{\partial s} - t\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$

2) Vi gör först variabelbytet $u = x^2$, $v = y^2$, vilket ger $dudv = 4xydxdy$. Detta ger integralen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\iint_{[0,\infty)^2} e^{-u^2-v^2}dudv = \frac{1}{16}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)}dudv \\ &= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr\right)d\theta = \frac{\pi}{16}\int_0^{\infty} e^{-r^2}2rdr \\ &= \frac{\pi}{16}\left[-e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{16},\end{aligned}$$

där vi har bytt till polära koordinater i andra likheten.

Svar: $\frac{\pi}{16}$

3) En parametrisering av kurvan ges av

$$\mathbf{r}(t) = (t, t-1, 2t^2 + (t-1)^2 - 2t(t-1)) = (t, t-1, t^2+1).$$

Detta ger

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 1, 2t), \quad \mathbf{r}''(t) = (0, 0, 2).$$

Alltså är $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (2, -2, 0)$. Formeln för krökning ger nu

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{2}}{(2+4t^2)^{3/2}}.$$

Vi ser direkt att krökningen är maximal då $t = 0$ och har värdet 1.

Svar: Den maximal krökningen är 1.

4) a) Eftersom $\mathbf{F}$ är konservativt finns en potential ϕ så att $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Låt $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ vara en parametrisering av C. Då gäller enligt definitionen av kurvintegralen och kedjeregeln att

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t))dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)).\end{aligned}$$

Vi ser att integralen bara beror på ändpunkterna.

b) Enligt Gauss' sats så gäller

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0,$$

ty $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$ eftersom $\mathbf{F}$ ligger i tangentplanet i varje punkt och $\mathbf{N}$ är en normal till tangentplanet.

5) Räkneregler för nablaoperatorn ger

$$\nabla \cdot (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h) + f\nabla \cdot (\nabla g \times \nabla h).$$

Vi måste visa att $\nabla \cdot (\nabla g \times \nabla h) = 0$. Nu är

$$\nabla \cdot (\nabla g \times \nabla h) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla g \times \nabla h) = &\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial z} \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x} = 0.\end{aligned}$$

6) Enligt Greens formel och formeln för variabelbyte i dubbelintegraler gäller

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}dx + u\frac{\partial v}{\partial y}dy = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy \\ &= \iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}dxdy \\ &= \iint_\Omega \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dxdy = \iint_\Omega \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = \iint_{F(\Omega)} dudv = \text{area}\, F(\Omega).\end{aligned}$$

7) Om avståndet har ett lokalt extremvärde, så har avståndet i kvadrat också det och omvänt. Låt Q ha koordinater (x, y, z) och P koordinater (a, b, c). Vi söker extremvärden till

$$f(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

under bivilloret $g(x, y, z) = 0$. Villkoren för Lagrangemultiplikatorer är uppfyllda eftersom $\nabla g \neq 0$ då $g = 0$. Alltså finns ett reellt tal λ så att

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) - \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0$$

om $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en extrempunkt. Nu är

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) = 2\overline{PQ_0},$$

varför

$$\overline{PQ_0} = \frac{\lambda}{2} \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Vi ser att λ ej kan vara noll då P ej ligger på ytan och alltså är $\overline{PQ_0}$ en normalvektor eftersom $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ är det.

8) Låt u, v, w beteckna koordinaterna för punkterna i tangentplanet. En normal till tangentplanet i punkten (x, y, z) till ytan $z = x^2 + y^2$ ges av $(2x, 2y, -1)$ och planets ekvation kan därför skrivas

$$2x(u-x) + 2y(v-y) - (w - (x^2 + y^2)) = 0.$$

Vi kräver att (a, b, c) ska ligga i detta plan vilket efter förenkling ger

$$2xa + 2yb - x^2 - y^2 = c. \tag{1}$$

Vi ser att om (x, y, z) ligger på ytan $z = x^2 + y^2$ och (x, y) uppfyller (1) så går tangentplant i (x, y, z) genom punkten (a, b, c). Vi måste visa att (1) har oändligt många lösningar (x, y) så att vi får oändligt många sådana tangentplan. Från (1) ser vi att

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c &= x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2 \\ &= (x-a)^2 + (y-b)^2. \end{aligned}$$

Detta är ekvationen för en cirkel och har oändligt många lösningar precis då $a^2 + b^2 - c > 0$. Vi ser från (1) att alla tangeringspunkter ligger i planet $2ax + 2by - z = c$.

Svar: Tangeringspunkterna ligger alla i planet $2ax + 2by - z = c$.