KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN
Matematiska Institutionen, **Höst 00.**

Lösning till Tentamensskrivning i Linjär algebra II 5B1109
23 oktober 14.00-19.00

Lösning till Uppgift 1

Vi har at $\frac{3}{1-i\sqrt{2}} = 1 + i\sqrt{2}$. Derfor er $1 - i\sqrt{2}$ også en rot. Dividerer vi polyomet med $(x-(1+i\sqrt{2}))(x-(1-i\sqrt{2}))$ finner vi at den tredje roten er 7.

Lösning till Uppgift 2

Vi utfører elementære radoperasjoner på koeffisientmatrisen og får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 5 & 13 & 2 & 13 & 49 \\ 4 & 8 & 13 & 4 & 13 & 59 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dette gir $x_3+x_5 = 3, x_2 = 0, x_1+x_4 = 5$, eller $x_1 = 5-s, x_2 = 0, x_3 = 3-t, x_4 = s, x_5 = t$ for alle s og t.

Lösning till Uppgift 3

Elementære operasjoner på matrisen som står til venstre for likhetstegnet gir

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -14 & -48 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & -67 & -228 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & -14 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -14 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Den inverse matrisen er derfor

$$\begin{bmatrix} -24 & -1 & -2 \\ 12 & 10 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får at den søkte matrisen blir

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & -1 & -2 \\ 12 & 10 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 16 & -3 \\ 10 & -13 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning till Uppgift 4

Vi bruker elementære operasjoner på koeffisientmatrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & a & 1 \\ -2 & -1 & a & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & a & -4 \\ 0 & -2 & a & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -4 \\ 0 & -3 & -2a & 13 \\ 0 & -2 & a & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -4 \\ 0 & 1 & 3a & -7 \\ 0 & -3 & -2a & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2a & 3 \\ 0 & 1 & 3a & -7 \\ 0 & 0 & 7a & -8 \end{bmatrix}.$$

Av den siste matrisen ser vi at om $a \neq 0$ så vil $5az = -47$ og vi får nøyaktig en løsning til ligningssystemet. Om $a = 0$ blir den siste matrisen lik $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$. Av den siste raden ser vi at systemet ikke har noen løsning.

Lösningerna fortsätter på sidan 2

Lösning till Uppgift 5

Vi bruker elementære rekkeoperasjoner på matrisene som har vektorene som rekker.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 10 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

så vektorene er lineært uavhengige og de spenner derfor rommet.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 22 \\ -4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så vektorene er lineært avhengige og kan derfor ikke spenne rommet.

Lösning till Uppgift 6

Det karakteristiske polynomet for matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

er $\lambda(-\lambda^2+8\lambda-11) = -\lambda((\lambda-4)^2-16+11$ så egenverdiene er 0, $4+\sqrt{5}$ og $4-\sqrt{5}$. Den kvadratiske formen er derfor ekvivalent med en kvadratisk form med disse elementene på diagonalen. Den kan derfor ikke ta negative verdier, men kan ta verdien null.

Lösning till Uppgift 7

Normalen til planet er $n = (5,6,-7)$ og punktet $Q = (-3,0,-1)$ ligger i planet. Linjen PQ har derfor retning $(-3,0,-1)-(3,1,0) = (-6,-1,-1)$. Derfor er distansen

$$\mathrm{proj}_{(5,6,-7)}(-6,-1,-1) = \frac{|(5,6,-7)\cdot(-6,-1,-1)|}{\sqrt{5^2+6^2+7^2}} = \frac{|-30-6+7|}{\sqrt{110}} = \frac{29}{\sqrt{110}}.$$

Lösning till Uppgift 8

Ta $v_1 = (1,0,2,0)$. La $v_2 = u_2 - \frac{<u_2,v_1>}{\|v_1\|}v_1 = (1,2,2,1) - \frac{1+4}{5}(1,0,2,0) = (0,2,0,1)$. Videre er $v_3 = u_3 - \frac{<u_3,v_1>}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{<u_3,v_2>}{\|v_2\|^2}v_2 = (4,-1,3,2) - \frac{4+6}{5}(1,0,2,0) = (2,-1,-1,2)$.

Vi har at v_1, v_2, v_3 er ortogonale. Den tilsvarende ortonormale basen er da

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0),\ \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,0,1),\ \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2).$$

Lösningerna fortsätter på sidan 3

Lösning till Uppgift 9

Det karakteristiske polynomet for A er $(\lambda-1)^3$. Egenvektorene er løsningene til ligningen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Denne har bare to lineært uavhengige løsninger så egenvektorene spenner ikke rommet. Derfor kan denne matrisen ikke diagonaliseres.

Matrisen B er symmetrisk så den kan diagonaliseres.

Det karakteristiske polynomet til matrisen C er $-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Ettersom den har tre ulike egenverdier kan den diagonaliseres.

Lösning till Uppgift 10

Normalen til linjen $y - 3x = 0$ har retning $(-3, 1)$. Linjen gjennom punktet $v = (a, b)$ som er normal på $y - 3x = 0$ har ligning $(a, b) + t(-3, 1)$. Denne skjærer linjen når t er bestemt av $b + t = 3(a - 3t)$, det vil si at $t = \frac{3a-b}{10}$. Går vi til den doble distansen havner vi i punktet som er symmetrisk med $v = (a, b)$ om linjen $y - 3x = 0$. Det vil si det symmetriske punktet er gitt av

$$(a, b) + \frac{3a-b}{5}(-3, 1) = (\frac{-4}{5}a + \frac{3}{5}a, \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b).$$

Med andre ord er matrisen $A = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.