KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN
Institutionen för Matematik, **Vår 01.**

Tentamensskrivning i Linjär algebra II, 5B1109 för F, D och I.
Måndag 8 jan. 2001, 14-19.

Hjälpmedel: Inga.
Anmärkning: Du får inga poäng för svar som inte har en noggrann förklaring.
16 poäng ger säkert godkänt.

Uppgift 1

Polynomet $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$ har ett nollställe $-i$. Bestäm övriga nollställen.

(3 poäng)

Uppgift 2

Bestäm alla lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +x_4 & = 51 \\ 3x_1 & +16x_2 & +28x_3 & +3x_4 & = 191 \\ 7x_1 & +35x_2 & +50x_3 & +7x_4 & = 362. \end{array}$$

(2 poäng)

Uppgift 3

Bestäm den matris X som är lösningen till ekvationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ -2 & -9 & -23 \\ -1 & -4 & -9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(3 poäng)

Uppgift 4

(a) Bestäm determinanten till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1+a \\ -3 & 0 & -1-a \\ -8 & -a & -1-a \end{bmatrix}.$$

(b) För vilka a har ekvationen

$$\begin{array}{cccl} x & +ay & +(1+a)z & = 0 \\ -3x & & -(1+a)z & = 0 \\ -8x & -ay & -(1+a)z & = 0 \end{array}$$

mer än en lösning?

(c) Bestäm dessa lösningar.

(3 poäng)

Uppgifterna fortsätter på sidan 2

Uppgift 5

Vilka av följande två familjer med 3 vektorer spänner upp det 3-dimensionella vektorrummet $\mathbf{R}^3$. Vilka av de två familjerna är linjärt oberoende?

(a) $(1, 3, 5), (4, 13, 2), (-5, 7, 1)$.
(b) $(1, 3, 5), (4, 13, 22), (-5, 7, 19)$.

(2 poäng)

Uppgift 6

(a) Finns det någon punkt (x, y, z) där den kvadratiska formen

$$7x^2 + 4y^2 + 7z^2 + 14xy$$

antar ett negativt värde?
(b) Finns det någon punkt skild från $(0, 0, 0)$ där den antar värdet 0?

(4 poäng)

Uppgift 7

Låt $P = (a, b, c)$ vara en punkt i $\mathbf{R}^3$, och låt F vara planet $x + 2y + z = 0$.

(a) Bestäm projektionen av punkten P på planet F.
(b) Bestäm speglingen av punkten P med hänsyn till planet F.
(c) Betsäm matrisen A som avbildar varje punkt i $\mathbf{R}^3$ till speglingen av punkten med hänsyn till planet F.

(5 poäng)

Uppgift 8

Bestäm en ortonormal bas för vektorrummet spänt av vektorerna

$$u_1 = (1, 0, 3, 0), u_2 = (1, 3, 3, 1), u_3 = (6, -1, 8, 3).$$

(4 poäng)

Uppgift 9

(a) Vad betyder det att en kvadratisk matris A är icke-singulär?
(b) Vad betyder det att en kvadratisk matrix A är diagonaliserbar?

Uppgift 9 fortsätter på sidan 3

(c) Är en icke singulär matris alltid diagonaliserbar? Om detta inte är sant ge ett exempel som visar detta.
(d) Är en diagonaliserbar matris alltid icke singulär? Om detta inte är sant ge ett exempel som visar detta.

(4 poäng)

Uppgift 10

Låt P vara punkten $(1,1,1)$ och l_1 linjen $(2,2,2)+t(3,2,1)$.

(a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten P och linjen l_1.
(b) Lå l_2 vara linjen $(-1,1,0)+t(0,1,1)$. Undersök om det finns någon linje genom P som skär både l_1 och l_2.

(5 poäng)