KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN
Matematiska Institutionen, **Vår 01.**

Lösning till Tentamensskrivning i Linjär algebra II 5B1109 för F, D och I
Måndag 8 jan. 2001, 14-19.

Lösning till Uppgift 1

Vi har att i også må være en rot. Derfor deler $(x-i)(x+i) = x^2+1$ polynomet. Vi har $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x^2+1)(x^2-5x+6)$. Polynomet x^2-5x+6 har røttene 2 og 3. Svaret blir i, $-i$, 2, 3.

Lösning till Uppgift 2

Vi utfører elementære radoperasjoner på koeffisientmatrisen og får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 51 \\ 3 & 16 & 28 & 3 & 191 \\ 7 & 35 & 50 & 7 & 362 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 51 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dette gir $x_3 = 5, x_2 = 3, x_1 + x_4 = 1$, eller $x_1 = 1-s, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = s$ for alle s.

Lösning till Uppgift 3

Elementære operasjoner på matrisen som står til venstre for likhetstegnet gir

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & -23 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -9 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Den inverse matrisen er derfor

$$\begin{bmatrix} -11 & -7 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får at den søkte matrisen blir

$$X = \begin{bmatrix} -11 & -7 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & 21 \\ 10 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning till Uppgift 4

(a) Vi bruker elementære operasjoner på koeffisientmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1+a \\ -3 & 0 & -1-a \\ -8 & -a & -1-a \end{bmatrix} = (1+a)a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -8 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (1+a)a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = (1+a)a(3\cdot 7 - 2\cdot 7) = 7(1+a)a.$$

Lösning till Uppgift 4 fortsätter på sidan 2

(b) Vi får mer enn en løsning når determinanten er null. Det vil si når $a = 0$ og når $a = -1$.

(c) Når $a = 0$ blir likningssystemet $x + z = 0$, $-3x - z = 0$, $-8x - z = 0$, som klart har løsningene $x = 0, y = s, z = 0$ for alle s. Når $a = -1$ blir likningene $x - y = 0$, $-3x = 0$ og $-8x + y = 0$, som opplagt har løsningene $x = 0, y = 0, z = t$ for alle t.

Lösning till Uppgift 5

Vi bruker elementære rekkeoperasjoner på matrisene som har vektorene som rekker.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 22 & 26 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 370 \end{bmatrix}.$$

Matrisen er derfor ikke singulær så vektorene er lineært uavhengige og de spenner derfor rommet.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 13 & 22 \\ -5 & 7 & 19 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 22 & 44 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen er derfor singulær så vektorene er lineært avhengige og kan derfor ikke spenne rommet.

Lösning till Uppgift 6

Det karakteristiske polynomet for matrisen

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

er $(7-\lambda)((4-\lambda)(7-\lambda) - 7\cdot 7 = (7-\lambda)(28 - 11\lambda + \lambda^2 - -49) = (7-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda - 21)(7-\lambda)((\lambda - \frac{11}{2})^2 - (\frac{11}{2})^2 - 21) = (7-\lambda)((\lambda - \frac{11}{2})^2 - \frac{205}{4})$ så egenverdiene er 7, $\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{205}}{2}$ og $\lambda_3 = \frac{11}{2} - \frac{\sqrt{205}}{2}$. Den kvadratiske formen er derfor ekvivalent med en kvadratisk form med disse elementene på diagonalen. Ettersom en rot er negativ og to er positive kan den både ta positive og negative verdier. For eksempel er $q(0,0,1) = \lambda_3 < 0$ Videre kan den ta verdien null for noe punkt forskjellig fra $(0,0,0)$. For eksempel er $q(\sqrt{\frac{|\lambda_2|}{7}}, 0, 1) = 7\frac{|\lambda_2|}{7} + \lambda_2 = 0$.

Lösningerna fortsätter på sidan 3

Lösning till Uppgift 7

(a) Normalen til planet F er $(1,2,1)$. Projeksjonen av P på F er derfor vektoren på formen $(a,b,c)-\lambda(1,2,1)$ som ligger i planet F. Med andre ord må vi ha $(a-\lambda)+2(b-2\lambda)+(c-\lambda)=0$ eller $\lambda=\frac{a+2b+c}{1+4+1}=\frac{a+2b+c}{6}$. Så projeksjonen er $(a,b,c)-\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)$.

(b) Speglingen av P med hensyn til planet F blir $(a,b,c)-2\lambda(1,2,1)=(a,b,c)-\frac{a+2b+c}{3}(1,2,1)$.

(c) Vi får at $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4\\-5\\-4\end{bmatrix}$, og at $A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$. Vi får altså at $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-4&-1\\-2&-5&-2\\-1&-4&2\end{bmatrix}$

Lösning till Uppgift 8

Vi bruker Gram-Schmidts algoritme. Ta $v_1=(1,0,3,0)$. La $v_2=u_2-\frac{<u_2,v_1>}{\|v_1\|}v_1=(1,3,3,1)-\frac{1+9}{1+3^2}(1,0,3,0)=(0,3,0,1)$. Videre har vi $v_3=u_3-\frac{<u_3,v_1>}{\|v_1\|^2}v_1-\frac{<u_3,v_2>}{\|v_2\|^2}v_2=(6,-1,8,3)-\frac{6+24}{10}(1,0,3,0)-\frac{-3+3}{1+9}(0,3,0,1)=(6,-1,8,3)-(3,0,9,0)=(3,-1,-1,3)$.

Vi har at v_1,v_2,v_3 er ortogonale. Den tilsvarende ortonormale basen er da

$$\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3,0),\ \frac{v_2}{\|v_2\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,3,0,1),\ \frac{v_3}{\|v_3\|}=\frac{1}{\sqrt{20}}(3,-1,-1,3).$$

Lösning till Uppgift 9

(a) En matris er icke singuljär om determinanten er olika noll.

(b) En matris A er diagonaliserbar om det finns en icke singuljär matris P sådan att produktet $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise.

(c) Nei, matrisen $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ er ikke singulær, men den kan ikke diagonaliseres ettersom de eneste egenvektorene er på formen $\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$.

(d) Nei, 1×1 matrisen $[0]$ er diagonal, men den er singulær.

Lösning till Uppgift 10

(a) Linjen $ax+by+cz=0$ inneholder P om $a+b+c=0$, og den inneholder l_1 om $a(2+3t)+b(2+2t)+c(2+t)=0$. Med andre ord inneholder linjen både P og l_1 om vi har at $a+b+c=0$ og $3a+2b+c=0$. Vi løser disse to likningene og får at $b=-2a$ og $c=a$ som gir linjen $x-2y+z=0$.

Lösning till Uppgift 10 fortsätter på sidan 4

(b) Linjen l_2 skjærer planet når t tilfredsstiller likningen $-1-2(1+t)+t=0$, det vil si for $t=-3$. Derfor skjærer l_2 planet i punktet $Q=(-1,1,0)-3(0,1,1)=(-1,-2,-3)$. Det finnes en linje gjennom P som skjærer både l_1 og l_2 om linjen PQ skjærer l_1. Det vil si, det finnes en slik linje om linjene $(1,1,1)+t(-1,-2,-3)$ og $(2,2,2)+u(3,2,1)$ inneholder et felles punkt. Dette gir likninger $1-t=2+3u$, $1-2t=2+2u$ og $1-3t=2+u$. Vi løser disse tre likningene for t og u og finner at de har løsninger $t=-1/4$ og $u=-1/4$. Svaret på (b) er derfor ja.