Det finnes ingen rettferdige valg!

Notater fra forelesninger i et prosjekt for gymnaset støttet av Marianne och Marcus Wallenbergs stiftelse.

Dan Laksov

Matematiska Institutionen
KTH

Matematiska Institutionen
KTH
100 44 STOCKHOLM

Innledning

En av de viktigste grunnene til å lære matematikk er at matematisk tankegang kommer til nytte i dagligliv, arbeide, administrasjon, politikk, teknikk og vitenskap. De samme metodene som brukes til å analysere matematiske teorier og problemer er nyttige for å analysere situasjoner der vi må foreta et valg mellom mange faktorer, eller forstå strukturen i et komplisert mønster. I matematikken fremtrer disse metodene mye klarere enn i anvendelsene, og det er lett å se hvor kraftfulle og anvendbare de er. I matematikken er det selvklart å dele opp problemer i små biter og analysere delene for å oppdage mønster, og deretter sette bitene sammen til en helhet.

Vi skal nedenfor illustrere styrken av matematikken ved å studere et vanlig valg der et antall velgere skal velge mellom flere kandidater. For mange virker det opplagt hvordan et valg skal arrangeres. Vi skal imidlertid vise at det både er vanskelig å skaffe seg en klar forestilling om hva et valg er, og hvordan man skal avgjøre resultatet av et valg. Historiske kilder viser at problemene ved å arrangere valg har blitt diskutert i flere tusen år uten at man har kunnet bli enig om hva som er et *rettferdig* eller *rimelig* valg. Store mengder avhandlinger har blitt skrevet om emnet og debattene om valgmetoder er hissige og voldsomme. Det vekket derfor stor oppmerksomhet da Kenneth Arrow (se [AW]) i begynnelsen på 1950'tallet satt opp en matematisk modell for et valg og viste at i denne modellen finnes det ingen valgmetoder som tilfredsstiller selv de mest rimelige krav på rettferdighet. Arrow's modell er enkel og lettfattelig og konklusjonen følger med elementære matematiske metoder. Dette viser hvor fantastisk anvendbare matematisk tankegang og metoder er for å analysere kompliserte situasjoner. For å komme på modellen kreves det imidlertid matematisk stort skarpsinne og en følelse for matematikk. Det forbauser derfor ingen at Arrow i 1971 fikk *Svenska Riksbankens jubileumspris i ökonomi til Alfred Nobels minne* (oftest kalt *Nobelprisen i økonomi*), spesielt for sine bidrag til filosofien og teorien for å ta beslutninger.

I denne artikkelen skal vi presentere Arrow's modell og vise hans berømte resultat. Vi håper på å vise hvordan matematisk tankegang gjør det mulig å formalisere en valgprosess og analysere den matematiske modellen. Kanskje kan vi samtidig gi et glimt av matematikken og dens teknikker og metoder.

Matematiska Institutionen, 22. desember 1999
Dan Laksov

iv **arrow**

2.1. Avstemninger og valgmetoder.

(2.1.1) Stemmesedler. Vi skal behandle en valsituasjon der vi har et antall velgere $v_1, v_2, \dots, v_m$, og kandidater $k_1, k_2, \dots, k_n$. Velgerne skal fylle i stemmesedler som består av en rekke bokser der velgerne plasserer kandiatene, med den kandidaten de setter først lengst til venstre, den kandidaten de setter på andre plass i boksen til høyre om denne, og så videre. To kandidater som velgeren vurderer like høyt settes i samme boks. Vi skriver ikke opp tomme bokser. Her er tre eksempler på stemmesedler som er utfylte med de 6 kandidatene u, v, w, x, y, z.

$$l_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x,y & z & u,w & v \\ \hline\end{array}$$

$$l_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline u,v,w & x & y & z \\ \hline\end{array}$$

$$l_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline x & u,v,w,y,z \\ \hline\end{array}$$

På stemmeseddel l_1 foretrekker velger v_1 kandidat x fremfor alle de andre kandidatene, men synes for eksempel at kandidatene u og w er likeverdige. Velger v_2 setter z sist på stemmeseddelene l_2 men u, v, w som likeverdige på første plass. På stemmeseddel l_3 har velger v_3 kandidat x på første plass og resten av kandidatene på siste. Den siste typen av stemmesedler er likeverdige med de som forekommer i valg der velgerne bare får sette navnet på en kandidat, eller parti, på stemmeseddelen. Vi tolker dette som at den valgte kandidaten, eller partiet, settes på første plass og de resterende kandidatene på siste plass.

Alle stemmesedler med 2 kandidater x og y er

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|}\hline x,y \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline\end{array}\,,$$

og de med 3 kandidater x, y og z er

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & y & z \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x & z & y \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline y & x & z \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline y & z & x \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline z & x & y \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline z & y & x \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & y,z \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline y & x,z \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline z & x,y \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline x,y & z \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline x,z & y \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline y,z & x \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|}\hline x,y,z \\ \hline\end{array}\,,$$

(2.1.2) Problem. Hvor mange ulike valsedler finnes det med 4 kandidater, og med 5 kandidater? Kan du gi en formel for antallet valsedler med n kandidater, der alle kandidatene står i ulike bokser? Kan du gi en formel for antallet valsedler der nøyaktig to av kandidatene står i samme boks og resten i ulike bokser? Kan du generaliserer?
arrow

(2.1.3) Avstemningen. Vi kan alle være einge om at alle valg består av to deler, avstemningen, og utvelgelsen av kandidatene fra de avgitte stemmesedlene. Avstemningen består i at samtlige velgere fyller ut hver sin stemmeseddel. Avstemningen produserer følgelig m stemmesedler $l_1, l_2, \ldots, l_m$ der l_i er valseddelen til velgeren v_i. Vi skriver en avstemning som $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ der l_i er den utfyllte stemmeseddelen til v_i.

To eksempler på resultat av avsteminger med 3 velgere og 2 kandidater x, y er

$$(l_1, l_2, l_3) = \left(\boxed{x \mid y},\ \boxed{x \mid y},\ \boxed{x, y} \right)$$

og

$$(l_1, l_2, l_3) = \left(\boxed{x, y},\ \boxed{y \mid z},\ \boxed{x \mid y} \right)$$

(2.1.4) Valgresultatet. For å bestemme resultatet av avstemningene behøver vi en metode som til hver mulig avstemning $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ bestemmer resultatet $U(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ av avstemningen, det vil si en liste som ser ut som en valseddel. Den kandidaten som vant valget står i den venstre boksen, den som ble nummer to i neste boks og så videre, og der to kandidater som velgerne fant likeverdige står i samme boks. En slik liste kaller vi en resultatliste.

Hver metode kan enkelt uttrykkes ved at vi skriver opp alle mulige avstemninger i en kolonne i en tabell og til høyre for hver avstemning skriver opp det resultatet som metoden gir.

Avstemning nr.	Avstemning:	Valgresultat:
1	$(l'_1, l'_2, \ldots, l'_m)$	$U(l'_1, l'_2, \ldots, l'_m)$
2	$(l''_1, l''_2, \ldots, l''_m)$	$U(l''_1, l''_2, \ldots, l''_m)$
3	$(l'''_1, l'''_2, \ldots, l'''_m)$	$U(l'''_1, l'''_2, \ldots, l'''_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Å finne en valgmetode er ikke vanskelig. Det er bare å gi en vilkårlig regel som til hver avstemning $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ gir en resultatliste $l = U(l_1, l_2, \ldots, l_m)$. Problemet er at vi har mange krav på en valgmetode for at vi skal oppleve den som *rettferdig*. Vi gir nedenfor en rekke eksempler på valgmetoder som vi alle vil finne dypt urettferdige på en eller annen måte.

(2.1.5) Eksempel. (**K2, K3, K4**) Dette er et eksempel der vi har to velgere v_1 og v_2 og to kandidater x og y. Vi har i midten på følgende tabell skrevet opp alle mulige avstemninger, og til høyre skrevet opp resultatet av avstemningen:

Avstemning nr.	Avstemning:	Valgresultatet:
1	($\boxed{x \mid y}$, $\boxed{x \mid y}$)	$\boxed{y \mid x}$
2	($\boxed{x \mid y}$, $\boxed{x, y}$)	$\boxed{x \mid y}$
3	($\boxed{x \mid y}$, $\boxed{y \mid x}$)	$\boxed{x \mid y}$
4	($\boxed{x, y}$, $\boxed{x \mid y}$)	$\boxed{x \mid y}$
5	($\boxed{x, y}$, $\boxed{x, y}$)	$\boxed{y \mid x}$
6	($\boxed{x, y}$, $\boxed{y \mid x}$)	$\boxed{y \mid x}$
7	($\boxed{y \mid x}$, $\boxed{x \mid y}$)	$\boxed{x \mid y}$
8	($\boxed{y \mid x}$, $\boxed{x, y}$)	$\boxed{y \mid x}$
9	($\boxed{y \mid x}$, $\boxed{y \mid x}$)	$\boxed{y \mid x}$

Som vi ser finnes det ni mulige avstemninger. Den høyre kolonnen, det vil si metoden, er ganske tilfeldig og den er urimelig på mange måter. Vi merker oss spesielt avstemingene 1 og 2. Sammenlikner vi avstemningen i valg 1 og 2 er det klart at vi venter oss at kandidat x skal gjøre det minst like bra i forhold til kandidat y i avstemning 1 som i avstemning 2. Vi ser imidlertid at y kommer foran x på resultatlisten av avstemning 1, mens x kommer foran y på resultatlisten av avstemning 2. Dett er klart uakseptabelt.

(2.1.6) Eksempel. (**K1, K3, K4**) (*Vektet valg*) En vanlig valgform er å vekte posisjonene på stemmeseddelen. Om vi har tre kandidater x, y, z kan vi, for eksempel gi de kandidatene som står i boksen lengst til venstre, *vekten* 3, de i boksen til høyre for denne vekten 2 og de restende kandidatene vekten null. For eksempel vil x og z begge få vekten 3 på stemmeseddelen $\boxed{x, z \mid y}$ mens y får vekten 2. På stemmeseddelen $\boxed{y \mid x, z}$ får y vekten 3 mens x og z får vekten 2. Metoden for å bestemme resultatet av en avstemning $(l_1, \dots, l_m)$ består av at vi summerer vektene til hver kandidat på listene $l_1, \dots, l_m$. Vi ordner kandidatene på den endelige resultatlisten $l = U(l_1, \dots, l_m)$ etter deres vekter ved avstemingen $(l_1, \dots, l_m)$. For eksempel, om vi har tre velgere x, y og z, og ser på avstemningen

$$\left(\boxed{x \mid y \mid z}, \boxed{x \mid y \mid z}, \boxed{z \mid x \mid y} \right),$$

får x, y og z vektene $3 + 3 + 2 = 8$, $2 + 2 + 0 = 4$ og $0 + 0 + 3 = 3$ respektive, så utfallet av avstemningen blir $\boxed{x \mid y \mid z}$. Ser vi på avstemningen

$$\left(\boxed{x \mid z \mid y}, \boxed{x \mid z \mid y}, \boxed{z \mid y \mid x} \right)$$

får x, y og z vektene $3+3+0=6$, $0+0+2=2$ og $2+2+3=7$ respektive, så utfallet av avstemningen blir $\begin{array}{|c|c|c|}\hline z & x & y \\ \hline\end{array}$.

Vi merker oss her at om vi tok bort kandidaten y fra valget skulle begge avstemningene bli

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline z & x \\ \hline\end{array} \right).$$

Som vi ser ble resultatet av den første avstemningen med 3 kandidater at x ble foretrukket fremfor z, mens resultatet av den andre avstemningen med 3 kandidater var at z ble foretrukket fremfor x. Dersom y ikke hadde kandidert ved valget ville imidlertid avstemningene vært like. Forholdet mellom x og z har derfor blitt påvirket av kandidaten y til tross for at den innbyrdes plasseringen av x og z er den samme ved begge avstemningene. Dette er klart uakseptabelt. Spesielt bisarrt blir dette om vi betrakter situasjonen baklengs. Da ser vi at vi med denne metoden kan manipulere resultatet av et valg mellom to kandidater ved å introdusere en tredje kandidat som ikke påvirker forholdet mellom de to kandidatene som allerede deltok i valget.

(2.1.7) Eksempel. (**K1, K2, K4**) (*Diktatorvalg*) En lett metode for å bestemme resultatet av en avstemning er å la resultatet være stemmeseddelen til en av velgerne. I eksempelet nedenfor, med tre velgere og tre kandidater x, y og z har vi latt velger v_1 bestemme valget:

Avstemning nr.	Avstemning:	Valgresultat:
1	$\left(\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & y & z \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{\|c\|c\|}\hline y,z & x \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{\|c\|c\|}\hline y,z & x \\ \hline\end{array} \right)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & y & z \\ \hline\end{array}$
2	$\left(\begin{array}{\|c\|c\|}\hline x & y,z \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline y & z & x \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline y & z & x \\ \hline\end{array} \right)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline x & y,z \\ \hline\end{array}$
3	$\left(\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & z & y \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline z & y & x \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline z & y & x \\ \hline\end{array} \right)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & z & y \\ \hline\end{array}$

I disse valgene er det en velger som helt avgjør valget. Personen er derfor diktator, og det spiller ikke noen rolle hva de andre velgerne stemmer på. De fleste vil finne at en slik metode er urimelig, selvom den praktiseres i mange land.

(2.1.6) Eksempel. (**K1, K2, K3**) (*Konstante valg*) En annen grei metode for å bestemme resultatet av et valg er å velge samme resultatliste uansett avstemningen. Det vil si, vi har bestemt på forhånd hvordan valgresultatet ser ut. For eksempel om vi har tre kandidater x, y og z, så lar vi valgresultatet være $\begin{array}{|c|c|}\hline z & x,y \\ \hline\end{array} = U(l_1, \ldots, l_m)$ uansett avstemning $(l_1, \ldots, l_m)$. Dette er heller ikke en helt uvanlig type valg, men det er få som synes den er bra ettersom det ikke spiller noen rolle hva velgerne stemmer på. Kanskje er den ennu værre en et diktatorsvalg, ettersom i alle fall diktatoren får sin vilje i diktatorvalget. Spesielt ser vi at i det *konstante valget* er det bare kandidatene i venstre boks som blir valgt. Vi vil selvsagt at alle kandidatene skal ha en sjanse til å bli valgt.

(2.1.9) Eksempel. En vanlig metode for å bestemme resultatet av et valg er at vi teller opp antallet lister $N(x, y)$ i en avstemning der kandidat x foretrekkes fremfor kandidat y og vi bruker tallene $N(x, y)$ til å avgjøre resultatet av valget ved å sette x til venstre om y om $N(x, y) > N(y, x)$, og sette dem i samme rute om $N(x, y) = N(y, x)$. Dette virker fornuftig, men vi skal se at dette ikke fungerer som en metode for å avgjøre resultatet av en avstemning. Se på avstemningen:

$$\left(\boxed{x \mid y \mid z}\,,\ \boxed{y \mid z \mid x}\,,\ \boxed{z \mid x \mid y} \right)$$

med tre velgere og tre kandidater x, y, z. Vi har at

N(x,y)=2	N(y,x)=1
N(y,z)=2	N(z,y)=1
N(x,z)=1	N(z,x)=2.

På listen med valgresultatet skal x stå til venstre for y ettersom $N(x, y) > N(y, x)$, kandidat y skal stå til venstre for z ettersom $N(y, z) > N(z, y)$. Spesielt får vi at x skal stå til venstre for z. Men dette er umulig ettersom vi har at $N(z, x) > N(x, z)$, så z skal stå til venstre om x. Derfor gir denne metoden ikke noen resultatliste og kan ikke brukes til å avgjøre et valg.

2.2. Rimelige krav på et valg.

Av eksemplene ovenfor ser vi at vi må stille en rekke krav til et valg for at vi skal betrakte det som rimelig. For å være mer presis så er det metoden som til hver avstemning $(l_1, \ldots, l_m)$ velger ut resultatlisten $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ som må ha en rekke egenskaper. Vi skal stille opp fire slike krav, svarende til de fire første eksemplene ovenfor. For at vi skal kunne formulere disse kravene på en enkel måte er det praktisk å innføre litt terminologi:

(2.2.1) Definition. La l være en stemmeseddel. Vi sier at en *kandidat x foretrekkes fremfor en kandidat y* på stemmeseddelen l om x står til venstre for y på l. Har vi to stemmesedler l og l' sier vi at to kandidater x, y har *samme rekkefølge på l* og l' om x foretrekkes fremfor y på l nøyaktig når x foretrekkes fremfor y på l', og at x og y står i samme rute på l nøyaktig når de står i samme rute på l'.

La l og l' være to stemmesedler. Vi sier at kandidat *x er minst like bra plassert på stemmeseddelen l' som på stemmeseddelen l* om alle kandidatene bortsett fra x har samme rekkefølge på l og l' og om x foretrekkes fremfor en kandidat y på l så gjør den det på l', og om x og y står i samme boks på l så står enten x og y i samme boks på l', eller x foretrekkes frem y på l.

→ Betrakter vi Eksempel (2.1.5) ser vi at et rimelig krav på en valgmetode er at om en kandidat gjør det bedre i en avstemning i forhold til en annen, så skal også valgresultatet bli bedre. Dette uttrykker vi som:

K1 La $(l_1, \ldots, l_m)$ og $(l'_1, \ldots, l'_m)$ være to avstemninger og la x være en kandidat som er minst like bra plassert på listen l'_i som på l_i hos alle velgerne v_i. Da har vi at, om x foretrekkes fremfor en annen kandidat y på valgresultatet $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ av første avstemning, så skal x foretrekkes fremfor y også på valgresultatet $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$ av andre avstemningen.

→ Av Eksempel (2.1.6) ser vi at et annet rimelig krav er det er den innbyrdes plasseringen av to kandidater ved en avstemning som avgjør deres innbyrdes plassering på resultatlisten for valget. Dette uttrykker vi som:

K2 La $(l_1, \ldots, l_m)$ og $(l'_1, \ldots, l'_m)$ være to avstemninger, og x og y to kandidater slik at x og y har samme rekkefølge på stemmesedlene l_i og l'_i for alle velgerne v_i. Om x foretrekkes fremfor y på resultatet $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ av den første avstemningen så skal x også foretrekkes fremfor y på resultatet $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$ av den andre avstemningen.

Det neste kravet er at vi ikke har noen diktator:

K3 Det finnes ingen velger v_i slik at for alle valgutfall $(l_1, \ldots, l_m)$ så vil resultatet $U(l_1, \ldots, l_m)$ av valget være lik l_i.

→ Av Eksempel (2.1.8) ser vi at det er rimelig å unngå at en kandidat kommer etter en annen kandidat uansett avstemingen:

K4 For hvert par av kandidater x og y finnes det en avstemning $(l_1, \ldots, l_m)$ slik at x foretrekkes fremfor y på resultatlisten $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ av avstemningen.

2.3. Egenskaper ved rimelige valg.

En av de flotte egenskapene ved matematikken er at den fra krav, eller aksiomer som matematikerne kaller dem, kan utlede konsekvenser som kan være vanskelige å forutse og iblandt forbausende. Disse resultatene har ingen ting med vår bedømning, eller moral å gjøre, men følger logisk av premissene. Vi skal nu vise noen slike konsekvenser av kravene på valgmetoder.

(2.3.1) Proposisjon. *Om kravene* **K1** *og* **K2** *holder så vil valgmetoden U for å avgjøre et valg tilfredsstille kravet:*

E1 *La $(l_1, \dots, l_m)$ og $(l'_1, \dots, l'_m)$ være to avstemninger og x og y to kandidater som ikke står i samme boks på noen av stemmeseddelene $l_1, l_2, \dots, l_m$, og slik at om x foretrekkes fremfor y på en stemmeseddel l_i så vil x foretrekkes fremfor y på stemmeseddelen l'_i. Da har vi at, om x foretrekkes fremfor y på resultatet $l = U(l_1, \dots, l_m)$ av den første avstemningen, så vil x foretrekkes fremfor y på resultatet $l' = U(l'_1, \dots, l'_m)$ av den andre avstemningne.*

Bevis. La $(l''_1, \dots, l''_m)$ være en tredje avstemning som vi konstruerer ved å la alle kandidatene bortsett fra x ha samme rekkefølge på l''_i som på l_i for alle i. Deretter plasserer vi x på l''_i slik at den har samme rekkefølge i forhold til kandidaten y som den har på l'_i. Ettersom vi har antatt at x står til venstre for y på l'_i om den gjør det på l_i, er det mulig å plassere x på denne måten på l''_i ved, om nødvendig, å føre den til venstre på l_i for alle i. Vi ser at x er minst like bra plassert på l''_i som på l_i for alle i. Ettersom vi har antatt at x foretrekkes fremfor y på $l = U(l_1, \dots, l_m)$ følger det av **K1** at x foretrekkes fremfor y på $l'' = U(l''_1, \dots, l''_m)$. Men x og y har samme rekkefølge på l'_i og l''_i for alle velgere v_i, og vi har nettopp vist at x foretrekkes fremfor y på l''. Det følger derfor av **K2** at x foretrekkes fremfor y på $l' = U(l_1, \dots, l'_m)$. Det var nettopp dette vi ville vise.

(2.3.2) Bemerkning. Merk at **E1** ikke er noe nytt krav, men en konsekvens av kravene **K1** og **K2**. Vi ser at det virker mindre naturlig at **E1** holder enn at **K1** og **K2** holder. I **E1** vet vi bare at x foretrekkes fremfor y på noen stemmesedler i det ene valget når den gjorde det på de tilsvarende stemmesedlene i det andre valget. Derimot vet vi ingen ting om de resterende kandidatene, som vi gjør i **K1**, eller at x og y har samme plassering på alle valglistene som vi gjør i **K2**. Allikevel forteller matematikken oss at om vi aksepterer **K1** og **K2**, så må vi også akseptere **E1**.

Vi skal vise en egenskap til:

(2.3.3) Proposisjon. *Om kravene* **K1**, **K2** *og* **K3** *holder så vil valgmetoden U tilfredsstille følgende egenskap:*

E2 *La x og y være to kandidater. Om $(l_1, \dots, l_m)$ er en avstemning slik at x*

foretrekkes fremfor y på alle stemmesedlene $l_1, \dots, l_m$ så vil x foretrekkes fremfor y på resultatet $l = U(l_1, \dots, l_m)$.

Bevis. Av **K3** følger det at det finnes en avstemning $(l'_1, \dots, l'_m)$ slik at x foretrekkes fremfor y på $l' = U(l'_1, \dots, l'_m)$. Vi konstruerer en avstemning $(l''_1, \dots, l''_m)$ slik at alle velgerne har alle kandidatene, bortsett fra x, samme rekkefølge på l''_i som på l'_i, og der vi plasserer x slik at x foretrekkes fremfor y på l''_i av alle velgerne v_i. Dette kan vi gjøre ved å, om nødvendig, flytte x til venstre på listen l'_i. Det følger at x er minst like bra plassert på l''_i som på l'_i hos alle velgerne v_i. Ettersom x foretrekkes fremfor y på l' følger det av **K1** at x foretrekkes fremfor y på $l'' = U(l''_1, \dots, l''_m)$. Men ettersom alle velgerne v_i foretrekker x fremfor y på l_i og l''_i og x foretrekkes fremfor y på l'' følger det av **K2** at x foretrekkes fremfor y på l. Det var dette vi ville vise.

(2.3.4) Bemerkning. Egenskapen **E2** virker ganske naturlig, men vi skal se at den har store konsekvenser. Vi fremhever igjen at **E2** ikke er et nytt krav, men en konsekvens av tidligere krav.

2.4. Arrows Sats.

For å vise Arrows Sats er det praktisk å innføre litt mer terminologi.

(2.4.1) Definition. La W være en gruppe blandt velgerne $v_1, \ldots, v_m$. Vi sier at *W bestemmer for kandidat x mot kandidat y* om vi har at x foretrekkes fremfor y på stemmesedlene til alle velgerne W så medfører dette at x foretrekkes fremfor y i alle valgresultatene.

Om W består av en velger som bestemmer for hver kandidat mot hver annen kandidat sier vi at W er en *diktator*.

(2.4.2) Bemerkning. Av **E2** ser vi at om $W = V$ så bestemmer W for hver kandidat mot hver annen kandidat. Videre medfører **E2** at om $(l_1, \ldots, l_m)$ er en avstemning der x foretrekkes fremfor y på stemmesedlene $l_1, \ldots, l_k$ og y fremfor x på stemmeseddelene $l_{k+1}, \ldots, l_m$, så vil $v_1, \ldots, v_k$ bestemme for x mot y. Uttrykt på denne måten blir **E3** ganske oppsiktsvekkende.

(2.4.3) Theorem. *La W være en velger. Om W bestemmer for kandidat x mot kandidat y så bestemmer W for x mot enhver tredje kandidat z, og for z mot y.*

Bevis. Vi kan uten innskrenkning anta at W er velger v_1. Først viser vi at W bestemmer for x mot z. Vka kan klart finne en avstemning $(l_1, \ldots, l_m)$ som har følgende tre egenskaper:

(1) x foretrekkes fremfor y på l_1.
(2) y foretrekkes fremfor z på alle stemmesedlene $l_1, \ldots, l_m$.
(3) z foretrekkes fremfor x på stemmesedlene $l_2, \ldots, l_m$.

Ettersom W bestemmer for x mot y følger det av (1) at x foretrekkes fremfor y på $l = U(l_1, \ldots, l_m)$. Videre følger det av (2) og Proposisjon (2.3.3) at y foretrekkes fremfor z på l. Derfor vil x foretrekkes fremfor z på l. Av (3) og Proposisjon (1) følger det at om x foretrekkes fremfor y på stemmeseddelen l'_1 i en avstemningen $(l'_1, \ldots, l'_m)$ så vil x foretrekkes fremfor y i $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$. Det vil si at W bestemmer for x mot z.

Beviset for at W bestemmer for z mot y er helt analogt. La $(l'_1, \ldots, l'_m)$ være en avstemning som tilfredsstiller følgende tre krav:

$(1)'$ x foretrekkes fremfor y på l_1.
$(2)'$ z foretrekkes fremfor x på alle stemmesedlene $l'_1, \ldots, l'_m$.
$(3)'$ y foretrekkes fremfor z på alle stemmesedlene $l'_2, \ldots, l'_m$.

Ettersom W bestemmer for x mot y følger det av $(1)'$ at x foretrekkes fremfor y på $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$. Videre følger det av $(2)'$ og Proposisjon (2.3.3) at z foretrekkes fremfor x på l'. Derfor vil z foretrekkes fremfor y på l'. Av $(3)'$ og Proposisjon (2.3.1) følger det derfor at om z foretrekkes fremfor y på liste

l_1'' i en avstemning $(l_1'', \ldots, l_m'')$ så vil z foretrekkes fremfor y på resultatet $l'' = U(l_1'', \ldots, l_m'')$. Det vil si at W bestemmer for z mot y.

(2.4.4) Korollar. *Anta at det er minst tre kandidater. Om en velger W bestemmer for en kandidat x mot en annen kandidat y, så er W en diktator.*

Bevis. Vi kan uten innnskrenkning anta at W er v_1. Antar først at $z \neq y$. Ved Setningen anvendt på x og y har vi at W bestemmer for z mot y. Bruker vi nu Setningen på z og y får vi at W bestemmer for z mot u.

Anta deretter at $z = y$. Vår antagelse er da at W bestemmer for x mot z. Ettersom vi har minst tre kandidater finnes det en kandidat v forskjellig fra x og z. Av Setningen anvendt på x og z følger det at W bestemmer for x mot v. Det følger derfor av Setningen anvendt på x og v at W bestemmer for z mot v. En tredje anvendelse av Setningen gir da at W bestemmer for z mot u.

(2.4.5) Theorem. *(Arrows Sats) Det finnes ingen rimelig valg med minst tre kandidater. Med andre ord, det finnes ingen valgmetode som tilfredsstiller kravene* **K1-K4** *om $m \geq 3$.*

Bevis. Det følger av Proposisjon (2.3.3) at V bestemmer for hver kandidat mot hver annen kandidat. Det finnes derfor en gruppe W av k velgere slik at W bestemmer for en kandidat x mot en kandidat y. Vi velger en slik gruppe der k er så liten som mulig. Da kan ikke $k = 1$ for da følger det at Korollar (2.4.4) at W er en diktator, hvilket er umulig på grunn av **K3**.

Anta at $k \geq 2$. Vi kan uten innskrenkninger anta at W består av velgerne $v_1, \ldots, v_k$. La x, y, z være tre kandidater. Velg en avstemning $(l_1, \ldots, l_m)$ som har følgende tre egenskaper:

(1) Kandidat x foretrekkes fremfor kandidat y og y fremfor kandidat z på stemmeseddelen x_1.
(2) Kandidat x foretrekkes fremfor kandidat y og kandidat z foretrekkes fremfor x på stemmesedlene $l_2, \ldots, l_k$.
(3) Kandidat y foretrekkes fremfor kandidat z og z fremfor kandidat x på stemmesedlene $l_{k+1}, \ldots, l_m$.

Av (1), (2) og (3) følger det at y foretrekkes fremfor z på valsedlene $l_1, l_{k+1}, \ldots, l_m$ og z foretrekkes fremfor y på stemmesedlene $l_2, \ldots, l_k$. Dersom z foretrekkes fremfor y på $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ følger det av **E3** at $l_2, \ldots, l_k$ bestemmer for z mot y. Dette er umulig ettersom k er minimal med egenskapen at k velgere bestemmer for en kandidat mot en annen. Derfor må vi ha at y foretrekkes fremfor z på l. Men W bestemmer for x mot y. Det følger derfor av (1) og (2) at x foretrekkes fremfor y på l. Derfor foretrekkes x fremfor z på l.

Av (1), (2) og (3) følger det at x foretrekkes fremfor z på stemmeseddelen l_1 og z fremfor x på stemmeseddelene $l_2, \ldots, l_m$. Derfor følger det av **E1** at v_1 Bestemmer for x mot Z. Men dette motsier at $k \geq 2$ på grunn av minimaliteten av k. Det følger at vi hverken kan ha at $k = 1$ eller at $k \geq 2$. Derfor finnes det ingen val som tilfredsstiller **K1-K4**.

2.5. Matematisk Formulering.

I denne seksjonen vil vi forklare hvordan begrepene som vi har diskutert tidligere kan formuleres matematisk.

Alle mulig stemmesedler danner en *mengde* $\mathcal{L}$. En avstemning er en samling av valsedler $l_1, \dots, l_m$, eller *elementer* i mengden $\mathcal{L}$, en for hver velger. Mengden av alle mulige avstemninger $(l_1, \dots, l_m)$ betengnes med $\mathcal{L}^m = \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \cdots \times \mathcal{L}$, og kalles det *Cartesiske produktet* n-ganger av $\mathcal{L}$. Derfor er en avstemning det samme som et element i mengden $\mathcal{L}^m$. En metode for å avgjøre resultatet av alle mulig avstemning gir, til hvert element $(l_1, \dots, l_m)$ i $\mathcal{L}^m$, en resultatliste l som er i $\mathcal{L}$. Med andre ord, en *metode* er en *funksjon*

$$U : \mathcal{L}^m \to \mathcal{L}.$$

Vi merker at en metode er en funksjon fra en endelig mengde til en endelig mengde.

Før vi gir en mer matematisk formulering av kravene **K1-K4** er det praktisk å gi en mer matematisk tolkning av stemmesedler. For hver stemmeseddel l, og hvert par av kandidater x og y skriver vi $x \underset{l}{\geq} y$ om x står til venstre for y på l, eller om x står i samme boks som y. Det er klart at følgende tre egenskaper holder for alle lister l:

O1$_l$ (*Refleksitet*) $x \underset{l}{\geq} x$.

O2$_l$ $x \leq y$ eller $y \underset{l}{\geq} x$.

O3$_l$ (*Transitivitet*) Om $x \underset{l}{\geq} y$ og $y \underset{l}{\geq} z$ så vil $x \underset{l}{\geq} z$.

Omvendt, anta at vi har en relasjon $x \geq y$ mellom elementene $k_1, \dots, k_n$ i en mengde som tilfredsstiller følgende tre krav:

O2 $x \geq x$.

O2 $x \geq y$ eller $y \geq x$.

O3 Om $x \geq y$ og $y \geq z$ så vil $x \geq z$.

Vi skal skrive at $x > y$ om $x \geq y$ og vi ikke har at $y \geq x$. Da kan vi bruke relasjonen til å fylle ut en stemmeseddel l slik at $x \geq y$ er det samme som $x \underset{l}{\geq} y$.

(2.5.1) Problem. Vis at en stemmeseddel er det samme som en relasjon $\geq$ på mengden $\{k_1, \dots, k_n\}$ som tilfredsstiller O1-O3.

Kravene **K1-K4** på et valg kan vi nu skrive som:

K1 La $(l_1, \dots, l_m)$ og $(l'_1, \dots, l'_m)$ være to elementer i $\mathcal{L}$, og la x være en kandidat slik at for hver kandidat y så vil $x \underset{l_i}{\geq} y$ medføre at $x \underset{l'_i}{\geq} y$, og for hvert par av kandidater y og z forskjellig fra x vil $y \underset{l_i}{\geq} z$ nøyaktig når $y \underset{l'_i}{\geq} z$. Om $x \underset{l}{>} y$ der $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ så vil $x \underset{l'}{>} y$ der $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$.

K2 La $(l_1, \ldots, l_m)$ og $(l'_1, \ldots, l'_m)$ være to avstemninger, og x og y to kandidater slik at $x \underset{l_i}{\geq} y$ nøyaktig når $x \underset{l'_i}{\geq} y$ for $i = 1, \ldots, m$. Da har vi at $x \underset{l}{>} y$ nøyaktig når $x \underset{l'}{>} y$ der $l = U(l_1, \ldots, l_m)$ og $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$.

K3 Det finnes ingen indeks i slik at $U(l_1, \ldots, l_m) = l_i$ for alle $(l_1, \ldots, l_m)$ i $\mathcal{L}^m$.

K4 For hvert par av kandidater x og y finnes det et element $(l_1, \ldots, l_m)$ i $\mathcal{L}^m$ slik at $x \underset{l}{\geq} y$ der $l = U(l_1, \ldots, l_m)$.

Arrows Sats kan nu formuleres som:

(2.5.2) Theorem. *Det finnes ingen funksjon $U\colon \mathcal{L}^m \to \mathcal{L}$ som tilfresstiller de fire kravene* **K1-K4** *når $\mathcal{L}$ har minst tre elementer.*

→ *Bevis.* Dette er bare en reformulering av Setning (2.4.5)

2.6. Kommentarer.

Hos Baylis ([B]) finnes referenser til artikler og lærebøker. Blandt disse finnes det endel som har alternative modeller og metoder. Hos Arkeryd ([A]) er det vist hvordan man ved å velge alternative betingelser for et rettferdig valg kan gi en forkortet fremstilling.

Det er lett å se at betingelsene til Baylis er de samme som vi bruker.

Vi har at **K1** medfører Krav 2 hos Arkeryd, men ikke omvendt. Krav 2 i Arkeryd er ikke helt rimelig ettersom vi kan ha at $x \underset{l_i}{\geq} y$ og $x \underset{l'_i}{>} y$, og at $x \underset{l}{>} y$, men bare at $x \underset{l'}{\geq} y$. Med andre ord, vi kan ha at kandidatene x og y står på samme plass på alle listene i en avstemning $(l_1, \ldots, l_m)$ og x kan være strikt foretrukket fremfor y på utfallet $l = U(l_1, \ldots, l_m)$, mens x kan være strikt foretrukket fremfor y på alle listene i en annen avstemning $(l'_1, \ldots, l'_m)$ med bare komme på samme plass i utfallet $l' = U(l'_1, \ldots, l'_m)$ av den andre avstemningen.

Kravet 3 i Arkeryd medfører Proposisjonen **E2**, men ikke omvendt. **Ew** sier at om alle velgerne foretrekker x fremfor y så vil utfallet av valget være at x foretrekkes fremfor y. Dette kalles (se [B]) for *Pareto optimering.* Krav 3 i Arkeryd medfører at om alle velgere bortsett fra en setter x og y på samme plass, men den ene velgeren setter x fremfor y, så blir utfallet at x kommer fremfor y. Det er noe mindre klart at dette er rimelig.

2.7. Referenser.

[A] L. Arkeryd, *Om rättvisa val*, Välj specialarbete i matematik (Dan Laksov, ed.), TDH AB, Bandhagen, 1989, pp. 17–22, ISBN 91–7170–851–0.

[AW] K.J. Arrow, *Social choice and individual values*, 2nd edition (1963), Wiley, 1951.

[B] J. Baylis, *Reasonable elections don't exist!*, The Mathematical Gazette **69** (1985), no. 448, 95–103.