Diofantiske likninger og Fermats Store Sats

Notater fra forelesninger i et prosjekt for gymnaset
støttet av Marianne och Marcus Wallenbergs stiftelse.

Dan Laksov

Matematiska Institutionen
KTH

Matematiska Institutionen
KTH
100 44 STOCKHOLM

Innledning

Diofantiske likninger tilhører de eldste områdene av matematikken. Problemstillingene er ofte enkle å forstå og studiet av diofantiske likninger er et eldorado for amatørmatematikere. Løsningene er derimot oftest vanskelige og krever dype teknikker og store matematiske kunnskaper. Et av de meste kjente resultatene i matematikken, *Fermats Store Setning*, eller *Fermats Siste Setning*, er et utsagn om en spesiell klasse av diofantiske likninger. I over 350 år prøvde mange av verdens fremste matematikere å vise Fermats påstand, og tusentals amatører prøvde å finne det *vidunderlige* beviset som Fermat påsto at han ikke hadde plass til i margen på sin oversettelse av de seks kjente kapitelen av Diofantos Arithmetika, et verk som sannsynigvis ble skrevet omkring 1400 år tidligere. Det er mye takket være denne bemerkningen at diofantiske likninger har fått så mye oppmerksomhet. Fermats Store Setning behandler bare en, blandt en stor mengde interessante klasser av diofantiske likninger (se det *klassiske* verket [H-W]). Tross den store interessen for diofantiske likninger finnes få teknikker og teorier for å løse slike likninger. Mest kjent er et negativt resultat som sier at det ikke finnes noen *algoritme* som løser alle slike likninger. Det er typisk at det først ble mulig å vise Fermats Store Setning da det ble observert at den følger fra resultater om *aritmetikken for elliptiske kurver*. For slike kurver finnes det en rik og dyp teori og de nødvendige formodningene i denne teorien ble vist av *A. Wiles* og *R. Taylor* ([WI], [WII], [W-T]).

På den andre siden har forsøkene til å vise Fermats Store Sats ført til store fremsteg innenfor andre områder av matematikken, som *algebraisk tallteori* og *algebra*. Flere av de mest interessante resultatene som er blitt bevist i vårt århundre har sine røtter i studiet av diofantiske likninger. *G. Faltings* løsning av *Mordells formodning* ([A], [FI], [FII], [F-P], [F-T-W]) og *A. Grothendieck* og *P. Delignes* løsning av *Weils formodninger* ([DI], [DII], [M-T]) tilhører disse.

Nedenfor skal vi forklare hva en diofantisk likning er og hvordan Diofantos verk Arithmetika, en gang oppbevart i det berømte biblioteket i Alexandria, kunne overleve alle kulturendringer og havne i en oversettelse hos Fermat. Vi gir også en skisse av historien til Fermats Store Sats.

Matematiska Institutionen, 29. desember 1999
Dan Laksov

iv **arrow**

1.1. Diofantiske likninger.

(1.1.1) Diofantiske likninger. Diofantiske likninger tilhører de mest fascinerende delene av matematikken. Problemene på området er lette å forstå, men ofte dype og vanskelige å løse. Diofantiske likninger er derfor et eldorado for amatørmatematikere og noen av matematikkens mest kjente problemer tilhører dette området. Flere av de viktigste oppdagelsene i matematikken har sine røtter i diofantiske likninger og et par av matematikkens største triumfer de siste årene har vært på dette området.

Det enkleste eksempelet på en Diofantisk likning er

$$x + y = z$$

som på fagspråket kalles, en *homogen lineær likning i tre variable* (see Oppgave
→ (1.1.4)))x, y og z. At vi kaller likningen *diofantisk* betyr at vi søker løsninger i hele tall, det vil si vi søker hele tallt a, b og c slik at

$$a + b = c.$$

De *hele tallene* er tallene $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ og vi skriver en løsning som (a, b, c). for eksempel er $(2, 3, 5)$ og $(-2, 4, 2)$ løsninger. Det er klart at alle løsninger kan skrive som $(a, b, a + b)$ der a og b er hele tall.

Et mer interessant eksempel på en diofantisk likning er

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

som kalles en *homogen kvadratisk likning i tre variable* x, y og z. Igjen kaller vi denne likningen diofantisk fordi vi søker etter hele tall (a, b, c) slik at $a^2 + b^2 = c^2$. alle kjenner vi til løsningen $(3, 4, 5)$, og noen få kjenner til $(5, 12, 13)$. Få vet at likningen har uendelig mange løsninger og at alle løsningene kan fåes som $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ der u og v er vilkårlige hele tall. At dette gir løsninger følger ved å sette inn $u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2$ istedenfor x, y, z respektive i likningen og verifisere at

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

→ Værre er det å vise at vi får alle løsningen på denne formen (see Oppgave(1.1.5)).

Likningen $x^2 + y^2 = z^2$ kalles ofte den *Pytagoreiske* fordi den forekommer i Pythagoras sats og fordi *Pythagoras* (580-500 f.Kr) kjente til løsningene $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$.

Andre eksempler på homogene kvadratiske likninger i tre variable er

$$x^2 - 2xy + y^2 = z^2$$

diofantos

og

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

Det er lett å se at alle løsningene av den første er gitt av $(u, v, u-v)$, der u og w er heltall. Den andre likningen er mer overraskende fordi den ikke har noen løsninger

→ (see Oppgave(1.1.6)).

(1.1.3) Fermats Store Sats. Den mest kljente av alle diofantiske likninger er

$$x^n + y^n = z^n$$

når $n \geq 3$. *Pierre Fermat* (1601-1655) påsto omkring 1637 at han hadde funnet et vidunderlig bevis for at disse likningene ikke hadde noen heltallsløsninger (a, b, c) med $abc \neq 0$, men at han ikke hadde nok plass til å skrive ned beviset i margen til den boken han var i ferd med å kommentere. Deretter har mange av de aller fremste matematikerne forgjeves prøvd å vise Fermats påstand, som har blitt kjent som *Fermats Store Sats*. Påstanden ble først vist på 1990'tallet med metoder som Fermat ikke hadde kunnet drømme om.

Fermat var en av sin tids fremste matematikere og har bidratt til matematisk analyse og sannsynlighetteori. Mest kjent er han for sine innsatser i tallteorien. Av yrke var Fermat jurist og han var en høyt verdsatt rådgiver til parlamentet i Toulouse. Hans store pasjon var matematikken og han kompenserte for sin isolasjon fra de aktive matematiske miljøene ved å opprettholde en livlig korrespondense med verdens ledende matematikere.

(1.1.4) Oppgave. Et polynom i x og y med heltallskoeffisienter er et uttrykk på formen

$$\begin{aligned} f(x, y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 \\ + \cdots + a_{n,0}x^n + a_{n,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{1,n}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n \end{aligned}$$

der $a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \ldots, a_{n,0}, a_{1,n-1}, \ldots, a_{0,n}$ er heltall. Vi sier at polynomet har grad n om minst en av koeffisientene $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{0,n}$ er forskjellig fra null. Til dette polynomet tilordner vi polynomet

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = a_{0,0}x^n + a_{1,0}xz^{n-1} + a_{0,1}yz^{n-1} + a_{2,0}x^2z^{n-2} + a_{1,1}xyz^{n-2} \\ + a_{0,2}y^2z^{n-2} = \cdots + a_{n,0}x^n + a_{n,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{1,n}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n \end{aligned}$$

i tre variable x, y, z. Det siste polynomet kalles *homogent* av grad n fordi summen av eksponenetene til x, og z er lik n for alle termene. Vis at $F(x, y, 1) = f(x, y)$.

Dette gir en korrespondense mellom polynomer av grad n i x og y og ikke-null homogene polynomer i x, y, z av grad n, slik at det til hvert polynom av grad n svarer nøyaktig et ikke null homogent polynoam av grad n og omvendt.

(1) Vis at løsninger (z, b) til likningen $f(x, y) = 0$, der a og b er *rasjonale tall* svarer til *heltallsløsninger* (c, d, e) til likningen $F(x, y, z) = 0$ der $e \neq 0$.

(2) Kan du generalisere korrespondensen i (2) til en korrespondense mellom polynomer i m variable $x_1, \dots, x_n$ og homogene polynomer i $m+1$ variable $x_0, x_1, \dots, x_n$. Gjelder denne korrespondensen for andre koeffisienter enn hele tall?

(3) Kan du generalisere korrespondansen mellom de rasjonale løsningene til et polynom i m variable og heltallsløsningene til et homogent polynom i $m+1$ variable?

(1.1.5) Problem. Vis at $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ gir alle løsningene til likningen $x^2 + y^2 = z^2$.
Hint: Den eneste løsningen med $z = 0$ er $(0, 0, 0)$, som svarer til $u = v = 0$. Vis at å finne heltallsløsninger der $z \neq 0$ er det samme som å finne løsninger til likningen $x^2 + y^2 = 1$ der x og y er rasjonale tall, d.v.s kvotienter av hele tall. For å finne de rasjonale løsningene kan du se på figuren.

Vis at linjer gjennom punktet $A = (0, -1)$ skjærer intervallet $(-1, 1)$ i et punkt $B = (a, b)$ med rasjonale koordinater a og b hvis og bare hvis den skjærer sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ i punktet $C = (c, d)$ med rasjonale koordinater c og d. Uttrykk nu c og d ved a og b.

(1.1.6) Oppgave. Vis at ligningen $x^2 + y^2 = 3z$ ikke har noen løsning.
Hint: Vis først at om (a, b, c) er en løsning så kan du finne en løsning (a', b', c') der a', b', c' ikke har noen felles divisor større enn 1. Hvert heltall kan skrives på en av de 3 formene $3m, 3m + 1, 3m + 2$ for noe heltall m. Vis at om a er på formen $3m + 1$ eller $3m + 2$ så er a^2 på formen $3n + 1$ for noe heltall n. Bruk dette til å vise at vi ikke kan han ha $a^2 + b^2 = 3c^2$.

1.2. Diofantos av Alexandria.

(1.2.1) Diofantos. De diofantiske likningene har få sitt navn etter *Diofantos av Alexandria.* Vi vet lite om personen Diofantos. Han livstid kan vi bare bestemme innenfor en periode på 500 år, men mange tror han levde omkring år 250 e.Kr. Diofantos må ha vært en kjent og respektert matematiker for mange matematikere fra *Theon av Alexandria* (4. århundret e.Kr.) har kommentert og sitert hans metoder og resultater. Som en kuriositet kan nevnets en lenge kjent oppgave (see
→ Oppgave(1.2.3)) som gir Diofantos alder som resultat.

Av Diofantos arbeider kjenner vi bare seks bøker av hans verk *Arithmetica* som besto av tretten bøker. Disse bøkene skiller seg på mange måter fra samtidige og tidligere verk. Blandt annet forekommer negative tall, og bruken av symboler i algebraen. Det er imiderltid de Diofantiske likningene som fikk størst betydning for ettertiden. Selv var han bare interessert i løsninger av likninger med positive rasjonale tall.

(1.2.2) Alexandria. Museion og biblioteket. At Diofantos virket i Alexandria var ingen tilfeldighet. Alexandria var verdens kulturelle senter i en lang periode som omfattet hele det 500 årige intervallet da Diofantos kan ha levet. Byen ble grunnlagt år 332 f.Kr. av *Alexander den Store* (356-323 f.Kr.). Etter Alexanders død ble hans imperium delt og en av hans generaler *Ptolemaios I Soter* (367/366∼283 f.Kr), som var visekonge i Egypten tok makten. Ptolemaios var ikke bare en førsteklasses general som grunnla et langt dynasti av konger i Egypt, men han må også ha hatt uvanlige kulturelle interesser og ambisjoner. I Alexandria grunnla han i begynnelsen av det 3dje århundret f.Kr. *Museion*, musenes tempel, som var et slags vitenskapsakademi. Dit ble fremstående vitenskapsmenn og kulturpersonligheter invitert for å dokumentere og utvikle tidens kunnskap og kultur. De ble betalt for å formidle sine kunnskaper til studenter og andre som besøkte Museion. Vi vet at fremstående vitenskapsmenn som *Euclid* (∼ 300 f.Kr), *Appolonius of Perga* (∼ 262-∼ 190 f.Kr.), *Eratosthenenes av Cyrene* (∼276-∼194), *Hipparchos* (?-∼127 f.Kr) , *Ptolemeus* (?-145) og *Hypatia* (∼370-415 f.Kr.) alle tilbragte lengre tid ved Museion. Etterhver ble Museion en stor anlegning med haver, forelesningssaler og bankettsaler og som var sentrum for tidens kultur og vitenskap selv etter at anlegget ble ødelagt i år 272 e.Kr.

Det berømte biblioteket i Alexandria var knyttet til Museion. Det ble også opprettet i begynnelsen av det tredje århudret f.Kr. av Ptolemaios I Soter, og var i drift frem til slutten av det tredje århundret e.Kr. Sammen med et annexbibliotek som ble opprettet omkring 235 f.Kr og ble opprettholdt frem til å 391 e.Kr. inneholdt det mye av samtidens kultur og vitenskap. Man tror at bibliotekene inneholdt i perioder mellom 400 000 og 700 000 manuskripter. Et anseeling antall selv med dagens målestokk. Kunnskap om denne historien burde lære våre politikere hvordan man, med visjoner og små midler, kan utføre underverk selv i perifere deler av verden.

Museion og biblioteket i Alexandria fikk en veldig betydelse for ettertiden. I år 334 e.Kr. delte den romerske keiseren *Konstantin* (272/273-337 e.Kr.) det romerske imperiet i en østromersk, eller *Bysantinsk*, del med sete i Konstantinopel, som han selv grunnla år 330 e.Kr., og i en vestromersk del med sete i Rom. Interessen for den kulturen som var representert i Alexandria var avtagende allerede under Konstantins tid. Etter at det Vestromerske Riket falt i år 476 e.Kr. dalte interessen ytterligere og sentrum for kultur og vitenskap ble flyttet til Konstantinopel og til arabiske kultursentre, som Bagdad.

(1.2.3) Oppgave. Han var gutt i en sjettedel av sitt liv, og etter en tolvtedel av livet var han gifteferdig. Det gikk en syvenedel til av livet før han ble gift, og deretter tok det 5 år før han fikk en sønn. Sønnen levde bare halvparten så lenge som faren, og etter sønnens død egnet Diofantos 4 år til med matematikken før han selv døde. Hvor gammel ble Diofantos?

1.3. En skisse av historien.

(1.3.1) Renessansen. Innholdet i mange av manuskriptene som fantes i biblioteket i Alexandria overlevet takket være avskrifter eller oversettelser til arabisk i det Østromerske Imperiet. Da det Østromerske Imperiet falt da de tyrkiske Ottomanene erobret Konstnatinopel i 1453 e.Kr. dalte interessen for kulturen fra Alexandria også i det Østromerske Imperiet.

I midten av 1400 tallet var renessansen allerede i full blomstring i Italien. Mange vil datere begynnelsen av renessansen til år 1401 da den kjente Italienske maleren *Masaccio* (1401-1444) ble født, og da de kjente arkitektene og skulptørene *Filippo Brunellelschi* (1377-1446) og *Lorenzo Ghiberti* (∼1378-1455) konkurrerte om å få oppdraget for portene til dåpskapellet til domkirken *Santa Maria del Fiore* i Firenze. Renessanse betyr gjenfødelse og antyder blandt annet en fornyet interesse for eldre kulturer, og fremfor alt kulturen fra Grekenland og Rom, det vil si, nettopp den kulturen som var representert i Alexandria. Allerede i middelalderen, og spesielt i det tolvte og trettende århudret hadde manuskripter fra Konstantinopel blitt kopiert av munker og nonner i Europa. Under renessansen fikk interessen for disse manuskriptene ny næring.

Den nyvunne teknikken med å sette og trykke bøker gjorde det billigere og lettere å produsere bøker i store opplag, og bidro til interessen for å oversette eldre verker. Den berømte førtito raders bibelen til *Johan Gutenberg* (∼1394-1468) kom ut i 1454/1455 og innledet en ny epoke for spredning av kultur og vitenskap.

I kloster og kirkebibliotek fant lærde avskrifter av manuskriptene fra biblioteket i Alexandria. Vi vet at *Regiomontanus* (Johan Müller 1436-1476) fant seks av bøkene i Diofanos Arithmetica skrevet på gresk i Venezia og han var så imponert over innholdet at han ville oversette bøkene til latin. Den første oversettelsen av Diofantos Arithmetika kom imidlertid først i 1575. Det var filosofen og filologen *Xylander* som oversatte de seks bøkene fra mansuskripter på gresk som han fant i Vatikanbiblioteket. En bedre oversettelse, sett fra et matematisk synspunkt, ble gjort av matematikeren *Claude-Gapar Bachet.* Det var i sitt eksemplar av denne oversettelsen som Pierre Fermat gjorde en rekke interessante notater, blandt disse det vi kaller *Fermats Store Sats.* Bemerkningene til Fermat ble publisert av Pierre Fermats sønn etter farens død. Fermats kommentarer ble tatt opp av andre matematikere som ganske snart kunne vise eller motbevise påstandene. Bare Den Store Satsen ble igjen. Derfor kalles den ofte *Fermats Siste Sats.* Ettersom den er så lett å forstå ble den et favorittemne for amatører som ville gjenfinne Fermats *vidunderlige bevis.* Sammen med alle forsøk på å vise at enhver vinkel kan tredeles med passer og lineal er sikkert Fermats Store Sats det resultatet som har flest feilaktige forsøk til bevis. I dag er det få som tror at Fermat hadde et bevis of Satsen, eller at den har en enkelt bevis.

(1.3.2) En skisse av historen til Fermats Store Sats. Historien til Fermats Store Sats har en lang og interessant historie. Fermat selv gjorde tilfellet $n = 4$ og opplysningtidesn fremste matematiker *Leonhard Euler* (1707-1783) gjorde tilfellet $n = 3$. Mange av forsøkene til bevis i siste halvdelen av 1800 tallet førte til store fremskritt i tallteorien og algebraen. *Entydig faktorisering* og *idealteorien* har begge sine røtter i bevis for spesielle tilfeller av Fermats Store Sats.

I begynnelsen av 1990 tallet visste man at Fermats Store Sats holder for

$$n < 4000000$$

og at om (a, b, c) er en løsning med $a < b < c$ og $n > 4000000$ så er

$$a > 10^{70000000}.$$

I sannhet en overbevisende indikasjon på at satsen holder.

(1.3.3) Problem. Vis at om $n = ml$ så er Fermats Store Sats sann for n om den er sann for m. Derfor behøver vi bare vise satsen når n er et primtall og for $n = 4$. Fermat viste derfor også satsen for alle like tall, og Euler for alle tall som er delbare med 3.

(1.3.4) Løsningen. Et avgjørende gjennombrudd kom i 1985 da *Gerhard Frey* formodet at om a, b, c er hele tall uten felles divisor slik at

$$a^n + b^n = c^n$$

for et primtall $n \geq 5$ så vil den *elliptiske kurven*

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$$

ikke være *modulær*. Vi skal ikke gå inn på hva en elliptisk kurver er, eller hva modulær betyr. Det sensasjonelle ved Freys observasjon er at den fører Fermats Store Sats fra teorien for Diofantiske likninger, et område av matematikken der det finnes lite systematisk teori og få generelle resultater, over til et problem om *aritmetikken* til elliptiske kurver. Aritmetikken for elliptiske kurver er et fascinerende og rikt område av matematikken, med røtter helt tilbake til Diofantos, der det finnes enorme mengder av generelle og dype resultater og spektakulære formodninger. En av disse er *Taniyama-Shimuras formodning* fra 1962 som sier at *Hver elliptisk kurve over de rasjonal tallene er modulær.* Freys observasjon ga derfor muligheter til å angripe Fermats Store Sats med noen av matematikkens kraftigste våpen.

I 1987 viste *Kenneth A. Ribet* at kurven $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ ikke er modulær. Fermats Store Sats følger derfor av Taniyama-Shimuras formodning.

Mange av tidens fremste matematikere hadde arbeidet med denne formodningen og de fleste trodde at Taniyama-Shimuras formodning lå langt utenfor rekkevidden for matematikken på den tiden, tross alt som var kjent om aritmetikken for elliptiske kurver. *Andrew Wiles* hadde motet, energien, og begavelsen til å egne hele sin tid til formodningen og kunne i 1993 påstå at *Hver semistabil elliptisk kurver over de rasjonale tallene er modulær*, det vil si at han kunne vise en litt svakere variant av Taniyama-Shimuras formodning. Ettersom det er lett å se at kurven $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ er *semi-stabil* ville han derfor ha vist Fermats Store Sats. Desverre fikk hans påstand et ubehagelig etterspill Det viste seg at Wiles argument ikke var komplett, og istedenfor å inrømme dette dro han seg tilbake for å fullføre beviset. Til slutt fikk han ta en av sine tidligere student *Richard Taylor* til hjelp og kunne sammen med Taylor gi et fullstendig bevis i 1995 Dette vakte stor oppmerksomhet langt utenfor matematiske kretser og er sikkert en av de største matematiske prestasjonene i vårt århundre.

(1.3.5) Andre Diofantiske likninger. For å få et balansert bilde av Diofantiske likninger må man forstå at problemene relater til Fermats Store Sats bare er en liten del av området. Det finnes en rekke andre store fremskritt som er gjort på dette området og mange problemer som gjenstår. For eksempel vekket det mye oppmerksomhet da *Gerd Faltings* i 1983 viste *Mordells formodning*, en av de viktigste satsene om diofantiske likninger av høy grad. Stort sett sier Mordells Formodning at de fleste kurver av grad minst 4 har høyst et endelig antall rasjonale punkter.

Er du interessert i problemer og resultater om Diofantiske likninger kan det være verd å kikke i en av de klassiske verkene om tallteori Hardy and Wright [H-W].

1.4. Referenser.

[A] H. Haahr Andersen, *Why Gerd Faltings got the Fields medal. (Danish)*, Normat **35** (1987), no. 3, 89–97.

[DI] P. Deligne, *Pierre La conjecture de Weil. I. (French)*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974), 273–307.

[DII] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II. (French)*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52** (1980), 137–252.

[FI] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern (German)*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.

[FII] G. Faltings, *Erratum: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern (German)*, Invent. Math. **75** (1984), no. 2, 381.

[F-P] G. Faltings, *Die Vermutungen von Tate und Mordell. (German)*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **86** (1984), no. 1, 1–13.

[F-T-W] G. Faltings, *The proof of Fermat's last theorem by R. Taylor and A. Wiles*, Notices Amer. Math. Soc. **42** (1995), no. 7, 743–746.

[H-W] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers (4'th edition)*, Oxford University Press, London, 1960.

[M-T] D. Mumford & J. Tate, *Fields medals. IV. An instinct for the key idea.*, Science **202** (1978), no. 4369, 737–739.

[WI] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. **(2) 141** (1995), 443–551..

[WII] A. Wiles, *Modular forms, elliptic curves, and Fermat's last theorem*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich 1994), Zrich Birkhuser, Basel, 1995, pp. 243–245.

[W-T] R. Taylor & A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. **(2) 141** (1995), 553–572.