EGENVEKTORER

ANTON WESTERLUND AND HÅKAN E JACOBSSON, N3

FARSTA GYMNASIUM

PA1201

2007-04-15

Det som gjør vektorer så viktige er at vi kan regne med dem.
-Dan Laksov, Prof. KTH

Innehåll

1. Introduktion

Vi ville skriva ett projektarbete i matematik och efter första mötet med Dan Laksov hade vi fått ett par olika områden som förslag till projektarbete.
Att vi valde egenvektorer var till stor del för att det är så välanvänt i dagens internetsamhälle.

I detta arbete ska vi behandla lineär algebra, med fokuspunkten på egenvektorer och egenvärden. Detta genom att beskriva matriser, vektorer och egenvektorer samt ge detta ett sammanhang genom att beskriva praktiska användningar för egenvektorer samt beskriva räkneoperationer för matriser och vektorer.

2. Matriser, vektorer samt operationer på dessa

I detta kapitel ska vi definiera matriser och vektorer. Samt beskriva de enklaste räkneoperationerna på dessa.

2.1. Matriser.

En matris är ett ordnat schema av reella tal.
I detta schema finns det m antal rader och n antal kolonner.

När man indexerar en matris använder man sig av beteckningen $a_{i,j}$. Där $a_{i,j}$ kallas för en koordinat i matrisen. Detta genom att i står för vilken rad koordinaten står på och j för vilken kolonn koordinaten står på. Alltså finner man koordinat $a_{i,j}$ på rad i och kolonn j. Alltså är $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ raderna och $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \end{pmatrix}$ kolonnerna.

2.2. Definition. En $m \times n$ matris ser ut på följande sätt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

där $a_{i,j}$ är reella tal för $i = 1, 2, 3, \dots, m$ och $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

2.3. Exempel. Ett exempel på detta är 3×3-matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

I denna matris är koordinat $a_{2,1} = 7$.

2.4. Definition. Om vi har en matris där koordinaterna enbart består av nollor kallar vi den för *nollmatrisen*.
$m \times n$ nollmatrisen ser ut på följande sätt:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. **Definition.** Identitetsmatrisen är en kvadratisk matris av formen $m \times m$.
I identidetsmatrisen återfinner man en trappstegsform av ettor och nollor, där ettorna bildar en diagonal uppifrån det vänsra hörnet ned till det högra hörnet i matrisen. Alltså gäller $a_{i,j} = 0$ då $i \neq j$ och $a_{i,i} = 1$ då $i = 1, 2, \ldots, n$.
$m \times m$ identitetsmatrisen ser ur påföljande sätt:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. **Vektorer.**
$\mathbf{R}^m$ kallas för det *Euklidiska m-rummet*, i detta rum finns alla vektorer med m koordinater. Till exempel så finns det i $\mathbf{R}^2$ endast vektorer med två koordinater.
En vektor är en följd av m reella tal, dessa tal kallas för vektorns koordinater.
Alla vektorer tillhör ett vektorrum, i detta rum finns det endast vektorer med samma antal koordinater.

En vektor är även den en matris, dock så har en vektor endast en kolonn. Således har en vektor formen $m \times 1$.
Alltså ser en generell vektor ut på följande sätt:

2.7. **Definition.**
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$
Detta är en m-vektor, där m anger hur många koordinater vektorn innehåller.

Eller om man vill skriva det med $m \times 1$-indexeringen:
$$a = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}.$$
För att spara plats på pappret kan man transponera vektorer, när en vektor transponerats ser den ut som följande:
$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^t.$$

2.8. **Exempel.** Ett exempel på en 3-vektor följer:
$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Denna vektor skrivs då som $(5, \pi, 1)^t$ när den är transponerad.

2.9. **Addition.**

Addition av två vektorer går endast att genomföra om de har lika många koordinater. Om vi har två olika vektorer i $\mathbf{R}^m$, a och b så måste de båda ha m antal koordinater. När man adderar två vektorer så adderar man varje koordinat i vektorn a med korresponderande koordinat i vektorn b.

Alltså går vektorn $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ att addera med vektorn $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

2.10. **Definition.** Vektoraddition ser ut som följer:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c.$$

2.11. **Exempel.** Ett exempel på detta är:

$$a + b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 2+0 \\ (-5)+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vid addition av matriser gäller det att båda matriserna är lika stora. Alltså att de matriser som ska adderas har lika antal rader och lika antal kolonner, alltså om matris A år en $m \times n$ matris så måste även matrisen B vara en $m \times n$ matris för att addition mellan dessa ska vara möjlig.
När man adderar matriser gäller samma sak som för vektorer, man adderar korresponderande koordinater med varandra.

2.12. **Definition.** Matrisaddition ser ut så här:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ & & \vdots & \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ & & \vdots & \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix} =$$
C.

2.13. **Exempel.** Matrisaddition ser alltså ut såhär:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & (-8) \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+(-8) \\ 1+5 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & (-6) \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

2.14. **Mutliplikation.**
I detta avsnitt ska vi beskriva de olika sorters multiplikation man kan tillämpa på vektorer och matriser.

2.15. **Skalärmultiplikation.**
En skalärmultiplikation är en multiplikation där
man multiplicerar alla koordinater i en matris med ett fixerat reellt tal.

2.16. **Definition.** Detta ser ut såhär:

$$t \cdot A = t \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a_{1,1} & t \cdot a_{1,2} & \dots & t \cdot a_{1,n} \\ t \cdot a_{2,1} & t \cdot a_{2,2} & \dots & t \cdot a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ t \cdot a_{m,1} & t \cdot a_{m,2} & \dots & t \cdot a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

2.17. **Exempel.** Ett exempel på detta är:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Detta går även bra med vektorer, då som vi tidigare beskrivit så är även en vektor en sorts matris.

2.18. **Multiplikation av matriser.**
När man utför en matrismultiplikatione finns det krav för att multiplikationen ska vara definierad.
För att en matrismultiplikation skall vara definierad måste den högra matrisen ha lika antal rader som den vänstra matrisen har kolonner.

2.19. **Definition.** En matrismultiplikation ser alltså ut såhär:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ & & \vdots & \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,q} \\ & & \vdots & \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + \dots + a_{1,p} \cdot b_{p,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{1,2} \cdot b_{2,2} + \dots + a_{1,p} \cdot b_{p,2} & \dots & a_{1,1} \cdot b_{1,q} + a_{1,2} \cdot b_{2,q} + \dots + a_{1,p} \cdot b_{p,q} \\ a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} + \dots + a_{2,p} \cdot b_{p,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} + \dots + a_{2,p} \cdot b_{p,2} & \dots & a_{2,1} \cdot b_{1,q} + a_{2,2} \cdot b_{2,q} + \dots + a_{2,p} \cdot b_{p,q} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{q,1} \cdot b_{1,1} + a_{q,2} \cdot b_{2,1} + \dots + a_{q,p} \cdot b_{p,1} & a_{q,1} \cdot b_{1,2} + a_{q,2} \cdot b_{2,2} + \dots + a_{q,p} \cdot b_{p,2} & \dots & a_{q,1} \cdot b_{1,q} + a_{q,2} \cdot b_{2,q} + \dots + a_{q,p} \cdot b_{p,q} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ & & \vdots & \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix} = C.$$

Alltså multiplicerar man den första koordinaten i rad 1 i matris 1 med den första koordinat i första kolonnen i matris 2, sedan adderar man kooordinat 2, rad 1, matris 1 med koordinat 1, rad 2, matris 2, och så vidare tills man är klar med första raden i matris 1 och första kolonnen i matris 2. Rad 1$\cdot$ kolonn 1 ger $c_{1,1}$, rad 1$\cdot$ kolonn 2 ger $c_{1,2}$ och så vidare ända tills rad $m\cdot$ kolonn n ger koordinaten $c_{m,n}$.

2.20. **Exempel.** Ett exempel på en matrismultiplikation är:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 12 & 5 \\ 16 & 10 & 8 \end{pmatrix} = C.$$

2.21. **Matris-vektormultiplikation.**
Som synes i exempel 2.7 kan en matris ändra form när den multipliceras.
Ett specialfall av detta är när en matris multipliceras med en vektor.
När en matris multipliceras med en vektor till höger om matrisen kommer en omformning att ske; matrisen kommer att bli en vektor.

$$(m \times n) \cdot (n \times 1) = (n \times 1)$$

När en matris multipliceras med en vektor till höger finns det några grundläggande krav för att multiplikationen ska vara definierad, dessa krav är:
1: Matrisen står till vänster i multiplikationen och vektorn till höger i multiplikationen.
2: Vektorn ha lika många rader som matrisen har kolonner.

Om dessa krav inte är uppfyllda är multiplikationen ej definierad.

2.22. **Definition.** Om kraven är uppfyllda ser multiplikationen ut som följer:

$$A \cdot b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + \ldots + a_{1,n} \cdot b_{n,1} \\ a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} + \ldots + a_{2,n} \cdot b_{n,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \cdot b_{1,1} + a_{m,2} \cdot b_{2,1} + \ldots + a_{m,n} \cdot b_{n,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{m,1} \end{pmatrix} = c.$$

2.23. **Exempel.** Ett exempel på detta är:

$$A \cdot b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Resultatet av en matris-vektormultiplikation blir alltså en vektor med lika många koordinater som matrisen hade rader.

3. Determinater

Idetta avsnitt ska vi behandla vad en determinant är och hur man beräknar denna för en 2×2 eller en 3×3-matris.

3.1. **Bemärkning.** Determinenten till en kvadratisk matris är ett tal, som enligt vissa regler bestäms av matrisens koordinater.

3.2. **Definition.** En kolonnvektor är en vektor som bildas av kolonnerna i en matris.

3.3. **Exempel.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Till denna matris är kolonnvektorerna:

$$(a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1})^t$$
$$(a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2})^t$$
$$(a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3})^t$$

Dessa tre vektorer bildar tillsammans med origo hörnen till en kropp i $\mathbf{R}^3$, en så kallad *parallellpiped*.

Vi betecknar determinanten för matrisen A på följande sätt:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

För en 2×2 eller en 3×3-matris så används **Sarrus regel** för att beräkna determinanten.

3.4. **Definition.** Sarrus regel ger för en 3×3-matris:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

Man sätter i detta fall de två första kolonnvektorerna till höger om den ursprungliga matrisen.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{1,1} - a_{3,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

3.5. **Defintion.** Sarrus regel ger för en 2×2-matris:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{matrix}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,2} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

3.6. **Exempel.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -4 & 2 \end{matrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 7 \cdot (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 0 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 7 = -6 + 56 + 0 - 4 + 8 - 8 = 54.$$

I detta exempel är alltså $Det(A)$ 54.

Determinanten kan också anta ett negativt värde, men oavsett om determinanten är positiv eller negativ så är volymen (eller arean) alltid positiv.

4. Egenvärden och egenvektorer

I detta kapitel ska vi definera egenvärden och egenvektorer

4.1. **Defintion.** Om A är en $n \times n$-matris, och det till denna matris finns en nollskild vektor v sådan att $A \cdot v = \lambda \cdot v$.
Då är v en egenvektor med egenvärdet λ till matrisen A.
Ett egenvärde λ korresponderar alltid mot en egenvektor v.
Alltså:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} xa_{1,1} + ya_{1,2} \\ xa_{2,1} + ya_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Denna ekvation är endast lösbar för ett ändligt antal λ.

4.2. **Exempel.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Vilket ger upphov till ekvationssystemet:

$$\left.\begin{aligned} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{aligned}\right\}$$

Substitution ger:

$$y = \lambda \lambda y = y = \lambda^2 y$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow y = x$ v blir då $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow y = -x$ v blir då $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

I detta fall är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ matrisens egenvektorer.

4.3. **Exempel.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x + 2y \\ 2x + y \end{matrix} = \begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}\right\}$$

Utlösning av x ger:

$$x = \frac{\lambda y - y}{2}$$

Substitution ger:

$$\frac{\lambda y - y}{2} + 2y = \lambda \left(\frac{\lambda y - y}{2} \right)$$
$$2\lambda y - y + 4y = \lambda^2 y - \lambda y$$
$$2\lambda y + 3y = \lambda^2 y$$
$$-\lambda^2 y + 2\lambda y + 3y = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

P-Q formel ger:

$$\lambda = \frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2} \right)^2 + 3}$$
$$\lambda = 1 \pm 2$$
$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = -1$$

4.4. **Det karakteriska polynomet.**
I detta kapitel ska vi behandla det karakterisktika polynomet.

Ett mer sofistikerat sätt att bestämma en matris egenvärden är genom att använda det karakteriska polynomet.

För att finna egenvärdena λ till $n \times n$-matrisen A skriver vi om ekvationen $A \cdot v = \lambda \cdot v$ till:

$$A \cdot v = \lambda I \cdot v$$

Där I är identitetsmatrisen. (Se 2.5 för definition)

Detta skrivs vidare om till:

$$(\lambda I - A)v = 0$$

För att skalären λ ska satisfiera ovanstående ekvation som ett egenvärde måste ekvationen ha em icketrivial lösning.

Den har en icketrivial lösning om och endast om:
(Se **Matriser og Vektorrom** sid. 97, **3.2** och sid. 107, **3.27**)

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Denna ekvation är matrisen A:s karakteristiska ekvation.
De skalärer λ som satisfierar denna ekvation är matrisens egenvärden.

När vi utvecklar ekvationen får vi ett λ-polynom (ett polynom av λ grader) som kallas för det karakteristiksa polynomet till A.

Om A är en 3×3-matris kommer det karakteristiska polynomet ha graden 3 och på formen:

$$det(\lambda I - A) = \lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3$$

Ekvationens nollställen svarar mot matrisens egenvärden.
Ekvationen har maximalt 3 antal lösningar, av detta följer att en 3×3-matris har maximalt 3 egenvärden.
Om A är en 2×2-matris kommer det karakteristiska polynomet ha graden 2 och på formen:

$$det(\lambda I - A) = \lambda^2 + c_1\lambda + c_2$$

Ekvationens nollställen svarar mot matrisens egenvärden.
Ekvationen har maximalt 2 antal lösningar, av detta följer att en 2×2-matris har maximalt 2 egenvärden.
Detta samband är alltid konstant, vilket betyder att en $n \times n$-matris har maximalt n st egenvärden.

4.5. **Exempel.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \lambda I \cdot v$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

$$\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

För att λ ska vara ett egenvärde till matrisen måste

$$det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

gälla.

Detta ger ett karakterisktikt polynom som följer:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$ch(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

4.6. **Exempel.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \lambda I \cdot v$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

$$\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

För att λ ska vara ett egenvärde till matrisen måste

$$det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0$$

gälla.

Detta ger ett karakteristikt polynom som följer:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$ch(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

P-Q formel ger:

$$\lambda = \frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3}$$
$$\lambda = 1 \pm 2$$
$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = -1$$

4.7. **Exempel.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \lambda I \cdot v$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

$$\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 3 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0.$$

För att λ ska vara ett egenvärde till matrisen måste

$$det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 3 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0$$

gälla.

Detta ger ett karakteristikt polynom som följer:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 3 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$ch(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0$$

Grafisk lösning ger $\lambda_1 = 6$

$$(\lambda - 6)(A\lambda^2 + b\lambda + C) = 0$$

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda - 6A\lambda^2 - 6B\lambda - 6C = 0.$$

$$A = 1$$
$$B = 0$$
$$C = -3.$$

Detta ger ett karakteristiskt polynom som följer:

$$ch(\lambda) = \lambda^2 - 3 = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{3}$$
$$\lambda_1 = 6$$
$$\lambda_2 = \sqrt{3}$$
$$\lambda_3 = -\sqrt{3}$$

5. Praktiska användningsområden

Sökning på internet
På internet idag finns det flera miljarder hemsidor, stora som små, bra som dåliga. Hur skall man på internet hitta just den information man vill ha? Det finns idag ett flertal tillvägagångssätt.

- Skriva in sökvägen i adressfältet.
- Spara sina favorithemsidor.
- Söka med hjälp av en sökmotor.

Vi skall titta närmare på det sistnämnda alternativet. Det finns många sökmotorer mer eller mindre bra. Den som idag utan konkurrens är störst och bäst är Goolge.

Det som utmärker Google ifrån andra sökmotorer som till exempel Altavista, Spray och Eniro, är att Goolge med stor precision rangordnar sina träffar och ger dig som söker den mest relevanta träffen för ditt sökord högst upp i sökresultatslistan.

Detta gör den genom att använda egenvektorer och egenvärden på ett raffinerat sätt som uppfanns av en man vid namn Frobenius vid det förra sekelskiftet.

Hur går det till?

Det Google gör är att söka upp alla hemsidor på hela internet med hjälp av en robot och lägga in dem i en enorm kvadratisk matris (ett lexikon) av storleksrdningen miljard $\times$ miljard. Detta lexikon lagras sedan på Googles servrar.
I denna matris representerar en koordinat i matrisens första kolonn varje hemsida. De övriga koordinaterna i matrisen består av hemsidornas relevanta sökord.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,x10^9} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,x10^9} \\ & & \vdots & \\ a_{x10^9,1} & a_{x^10^9,2} & \dots & a_{x10^9,x10^9} \end{pmatrix}$$

Alltså är $(a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{x10^9,1})^t$ hemsidorna, och de övriga koordinaterna är sökorden för hemsidan på samma rad.

Sedan räknas matrisens egenvärden ut.
När Google-robotenhittat alla egenvärden räknar den ut sen största reela egenvektorn som korresponderar till det största reella egenvärdet.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{x10^9} \end{pmatrix}$$

Den här egenvektorn innehåller nu referenser till alla hemsidor på internet.

När Google har denna egenvektor klar så påbörjas nästa beräkning, syftet med denna är att rangordna alla internets hemsidor efter relevans så att vi får upp det vi söker efter som första träff.

Vad Googe gör är att den skapar en ny vektor med referenser till alla hemsidor, men till skillnad från egenvektorn v så är denna vektor e rangordnad.

Det är denna beräkning som utmärker Google ifrån de andra sökmotorerna på internet idag.

Själva beräkningen för att rangordna vektorn går till på följande sätt. Man börjar med matrisen (lexikonet) A och en villkorlig vektor, $e = (1, 0, 0, 0, \ldots, 0)^t$, dessa multiplicerar man med varandra som beskrivet i 2.21 (sid 13) och får då en ny vektor, e_1.
Sedan kan man göra på två sätt, antingen kan man börja öka exponenten för matrisen och multiplicera med den nya vektorn e_1.

$$e_2 = A^2 e_1$$

Men om man fortsätter med den här metoden kommer vektorn e_n få enormt stora värden i sina koordinater.
Eftersom framgången i denna beräkning är upprepning så lämpar sig detta inte så väl.

Det är följande metod som Frobenius kom på.

Vad man istället gör är att man dividerar den nya vektorn e_1 med längden av sig själv, $|e_1|$ och sedan upprepar detta fast med den nya vektorn 52 gånger. Att man gör denna upprepning just 52 gånger är för att efter 52 gånger så ändras inte värdena nämnvärt längre.

5.1. **Definition.**

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Alltså gör man så här:

$$e_1 = \frac{Ae}{|Ae|}, e_2 = \frac{Ae_1}{|Ae_1|}, e_3 = \frac{Ae_2}{|Ae_2|}, \ldots, e_{52} = \frac{Ae_{51}}{|Ae_{51}|}$$

Nu, tack vare att man dividerat med längden av vektorn Så får inte koordinaterna enorma värden och att läsa av denna rangordningsvektor går nu väldigt smdigt för Google.

Det största värdet på en koordinat motsvarar nu det största antalet relevanta länkar till en hemsida. Den med största värdet har alltså flest länkar till sig från andra hemsidor och därmed störst relevans för din sökning.

När du sedan söker så börjar Google leta i sitt lexikon, A efter hemsidor som innehåler ditt sökord, när denna sökning är klar så visas hemsidorna enligt den ordning som referenserna ligger i vektorn e_{52}.

Ordet man skriver in i sökfältet i Google finns om det är rättstavat i deras ordlistor (beroende på censureringrgraden i det land du Googlar). För alla ord i ordlistorna har Goolge redan hittat alla träffar och rangordnat dem när du söker.
Denna rangordning blir klar c:a varannan vecka men håller på hela tiden. Med andra ord så är din sökning redan klar när du klickar på Googlesökning.

När man Googlat står det hur lång tid sökningen tog, i själva verket är det den tid det tog för Google att söka upp ordet i sin ordlista som visas. Sökningen tog ju c:a två veckor.

Vi tänkte visa i smått format hur hela beräkningen går till.

Vi börjar med matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Denna matris har det karaktersiska polynomet

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

med lösningarna

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = -1.$$

Som vi ser är $\lambda_1 = 3$ det största egenvärdet.

För att finna egenvektorn som korresponderar till $\lambda_1 = 3$ ställer vi upp följande ekvation.

$$A \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Vi får då att

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vi utför multiplikationerna och har nu

$$\begin{pmatrix} 3x + 0 \\ 8x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Detta ger upphov till ekvationssystemet

$$\left.\begin{array}{rrcr} 3x & & = & 3x \\ 8x & -y & = & 3y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x & = & x \\ 8x & = & 4y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x & = & x \\ 2x & = & y \end{array}\right\}.$$

Vi har då att

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $v = (1, 2)^t$ den egenvektor som korresponderar till $\lambda_1 = 3$, detta kontrolleras enkelt genom beräkningen $A \cdot v = \lambda \cdot v$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 + 0 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nu till rangordningsberäkningenkningen.

$$e = (1,0)^t$$

$$\frac{Ae}{|Ae|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 8^2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{73}}, \frac{8}{\sqrt{73}} \right)^t = e_1$$

$$\frac{Ae_1}{|Ae_1|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{73}} \\ \frac{8}{\sqrt{73}} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{73}}\right)^2}} = \left(\frac{\left(\frac{9}{\sqrt{73}}\right)}{\sqrt{\frac{337}{73}}}, \frac{\left(\frac{16}{\sqrt{73}}\right)}{\sqrt{\frac{337}{73}}} \right)^t = e_2$$

Efter denna beräkning blir det för mycket att hålla reda på för oss, men som det ser ut i detta skede skulle hemsidan med referensen 2 i egenvekton ha störst relevans om man sökte på ett ord och fick upp båda två som träffar.
Detta för att y-koordinaten i rangordningsvektorn i detta skede har störst värde.

$$\frac{\left(\frac{9}{\sqrt{73}}\right)}{\sqrt{\frac{337}{73}}} \approx 0,49$$

$$\frac{\left(\frac{16}{\sqrt{73}}\right)}{\sqrt{\frac{337}{73}}} \approx 0,87.$$

6. Sammanfattning

Som vi skriver i början så valde vi detta ämne för att det är högaktuellt i dagens moderna samhälle. Även då det ligger något under ytan och inte är något som gemene man känner till. Ändå så är det så viktigt att det finns. Google har ju revolutionerat internetsökandet och är idag en miljonindustri. Under våra år av sökning på internet har olika söktjänster stått till förfogande men allas våra vägar har lett, i vår mening, till Goolge förr eller senare. Nu har vi undersökt hur Google gör detta enastående arbete med att söka genom internet.

Vi tycker att definitioner är viktiga i matematiken då man inte ofta kan associera vad till exempel en determinant är som när man tänker sig tillexempel ett hus.

Våra slutsatser är att matematiken är grunden till allt. Man kan inte leva utan matematiken vare sig man vill eller inte. Den ligger under marken, det är rötterna till vetenskapsträdet. Även om man inte tänker på det så utför man beräkningar hela tiden. Som när man skall gå över gatan, du beräknar om du kan gå innan bilen kommer framrusande eller något så enkelt som att titta på klockan kräver en mindre matematisk beräkning.

Vi vill även tacka Dan Laksov och Roy Skjelnes vid KTH för all hjälp vi fått med detta projektarbete.

7. Källor

För att kunna sammanställa detta arbete har vi använt följande källor:

Elementary Linear Algebra: Applications Version, 7th edition, H. Anton och C. Rorres (1994)

Lineär algebra och geometri, Gunnar Bergendal och Inge Brinck (1966)

Matriser og vektorrom, version 5, Dan Laksov (2005)

Matematikk og Informasjonssøkning på Nettet, Dan Laksov (2002)

ALFA matematisk handbok, Lennart Råde (1980)

Kursen MA511; Linjär Algebra med Vektorgerometri, under ledning av Roy Skjelnes, KTH (ht 2006 - vt 2007)

Lineär algebra med vektorgeometri, Anders Tengstrand (2005)

Wahlström & Widstrands Matematiklexikon, Jan Thompson under medverkan av Thomas Martinsson (1991)

8. Referenser

Dan Laksov, KTH
laksov@math.kth.se

Roy Skjelnes, KTH
skjelnes@math.kth.se

Farsta Gymnasium, Stockholm, Sweden

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden