Innehållsförteckning

Inledning

Hur vet man hur många myntsorter man behöver för att kunna betala de priser man vill i ett land? Detta är en fråga som vi valt att fördjupa oss i.
Ämnet matematik är något som intresserar oss båda och därför var det ett självklart val när vi skulle välja projektarbete. Vi fick flera olika förslag på matematikprojekt av vår handledare Åke Johansson. Dessa tittade vi genom och efter mycket eftertanke valde vi *Myntväxling* av Dan Laksov, matematikprofessor på KTH. Vi valde *Myntväxling* eftersom det var det ämne som vi lättast kunde relatera till vår vardag. Det verkade helt enkelt vara roligast.
Problemet som Laksov formulerade var från början ett specialarbete som vi ändrade om till ett projektarbete, delvis genom att förkorta det. De problem som vi visar nedan är det ursprungliga specialarbetet. Vi förkortade det under arbetets gång tillsammans med Laksov och löste uppgift A t.o.m. H, som vi redovisar. Detta eftersom att det, enligt Laksov, var ett tillräckligt projektarbete.
Från början var problemformuleringen nedan skriven på norska, som vi sedan har översatt till svenska.
För närmare beskrivning av projektet, se bilaga (1).

Problemformulering

Beskrivning av uppgiften:

Denna uppgift kan behandlas helt experimentellt. Den passar dock bäst som ett samspel mellan experiment (på dator eller för hand) och teoretiska övervägningar. Teorin som kan användas kan hämtas mest från elementära talteorier och ligger väl innanför vad du känner till från läroboken. Metoder som kedjebråk, rekursionsformler, kombinatorik… kan också användas. En grundlig genomgång av den första delen av uppgiften (de experimentella delarna av A – N nedanför) borde du klara om du är intresserad av matematik och detta borde räcka för ett projektarbete. Man kommer emellertid fort fram till forskningsfronten och kan finna en mängd tilltalande, men svårare problem i nära anknytning till detta ämne. Vi har nämnt några av de i slutet av uppgiften.

Den kände tyska matematikern F. G. Frobenius (1849 – 1917) hävdade ofta att problemställningarna vi tar upp i denna uppgift är intressanta och uppstår naturligt i många olika sammanhang i matematiken och användningsområden. Han var emellertid klar över att problemet generellt var mycket svårt och att man inte kan vänta sig finna direkta uttryck för de talen man betraktar. P.g.a. dessa svårigheter har detta område aldrig blivit centralt i matematiken, men det har fascinerat en lång rad matematiker.

Problemet:

I ett land har de bara två myntsorter. Den ena av valörena $a = 5$ (kronor, dollar, pund, lire,…) och den andra $b = 9$. Din uppgift är att hitta vilka priser man kan sätta på varorna i landet för att man ska kunna betala varan med ett exakt antal mynt.

A

Visa att man kan betala följande belopp:
5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, …

Fortsätt tabellen, ser du något mönster?

B

Kan du visa att varorna i landet kan ha priset 32 och alla priserna över det? Tips, det räcker att visa att man kan betala fem priser som följer efter varandra med en differens på en enhet.

C

Ha kvar myntsorten *a* och prova med några värden på myntsorten *b* för t.ex. b = 1, b = 2, …, b = 10. Bestäm i vart fall det högsta priset du *inte* kan betala. Ser du något mönster?

Eftersom det finns ett högsta pris du *inte* kan betala betecknar du detta pris i g(a,b). Du kan alltså betala alla priser g(a,b) + 1, g(a,b) + 2, g(a,b) + 3,… T.ex. är g(5,9) = 31.

D

För vilka av myntsorterna du har provat i **C** ovanför existerar g(5,b) och vad är värdet av g(5,b)? Ser du något mönster? Kan du gissa när g(5,b) existerar för variabelt *b*? Kan du gissa en enkel formel för g(5,b) uttryckt med *b*?

E

Försök att bevisa gissningarna från **D**.

Ett annat viktigt tal är antalet priser du *inte* kan betala. Då a = 5 och b = 9 kunde du inte betala priserna 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26, 31. D.v.s. 16 priser.
När g(a, b) existerar betecknar vi med n(a,b) antalet priser vi inte kan betala. T.ex. n(a, b) = 16

F

Bestäm n(5,b) för de myntsorter du experimenterade med i **C**. Kan du gissa vad n(5,b) är för villkorlig *b*? Kan du visa att din gissning stämmer?

G

Experimentera med att hitta g(a,b) för olika värden på *a* och *b*. Kan du gissa för vilket par av *a*, *b* talet g(a,b) existerar? Kan du gissa en enkel direkt formel för g(a,b) uttryckt med a och b? Bestäm också n(a,b) och försök att gissa en enkel formel för detta tal uttryckt med a och b.

H

Kan du bevisa gissningarna du gjorde i **G**?

Mer hjälp med problemen A – H kan du hitta i referenslistan (1).

När landet har tre myntsorter *a, b* och *c* kan man ställa samma fråga, men denna är mycket svårare att svara på. Vi betecknar med g(a,b,c) det största priset som *inte* kan växlas, när det hittas, och med n(a,b,c) antalet priser som inte kan växlas.

I

Experiment med tre myntsorter, t.ex. vid att låta *a* och *b* vara som i första delen av uppgiften och variera *c*. Bestäm g(a,b,c) och n(a,b,c) vid dessa tillfällena.

J

Kan du då det är två myntsorter visa för vilka myntsorter *a, b* och *c* talet g(a,b,c) existerar?

K

Kan du av experimenten i **I** gissa en övre gräns för g(a,b,c) när denna existerar? T.ex. kan du undersöka om g(a,b,c) = $a*b*c$ när g(a,b,c) hittas. Kan du hitta bättre gränser?

L

Här har du en tabell över några kända övre gränser för g(a,b,c) när vi har $a < b < c$:

T. Skolem (1930)	$(a – 1)(b + c – 1) – 1$
I. Schur (1935)	$(a – 1)(c – 1) - 1$
R. Brauer (1942)	$ab/d + dc – a – b – c$, där d är största fallets nämnare till a och b
M. Lewin (1972)	$[(c – 2)^2 / 2] – 1$
M. Lewin (1973)	$[1/2(c – 2)(b – 2)] – 1$
J. Roberts (1956)	$a(c – a – 2 + [a / (c – a)]) + (b – a – 1)(c – a – 1)$

Sätt in i formlerna för en del värden på *a, b* och *c* och sammanlänka med de verkliga värdena för g(a,b,c). Gränserna ovanför och referenser till originalarbetena kan du finna i referenslistan (3).

M

Kan du hitta något samband mellan talen g(a,b,c) och n(a,b,c)?

Det är komplicerat att hitta exakta uttryck för g(a,b,c) och n(a,b,c) när dessa hittas. Liknande uttryck hittades för några år sedan och är ganska komplicerade. I (2) i referenslistan är en del av detta arbete beskrivet och du kan där hitta vidare referenser till annan litteratur om du är intresserad.

N

Kan du säga något om exakta uttryck för g(a,b,c) och n(a,b,c)? Kanske du kan bestäma exakta uttryck för speciella värden av *a, b* och *c* som t.ex. b = a + d och c = a + 2d för något heltal d.

För fyra och fler myntsorter är du på forskningsfronten. Kan du säga något vid detta tillfälle?

Referenslista:

(1) Gardiner, A, *Discover Mathematics*. Oxford Science Publ. 1987.

(2) Selmer E.S. To populære problemer I tallteorien. I myntveklsling, II Frankering. *Normat 29 (1981)*.

(3) Smorynski, C. Skolem's solution to a problem of Frobenius. *The mathematical intelligencer **3*** (1981), 123 – 132.

Sammanfattning

I varje uppgift A t.o.m. H har vi kommit fram till ett resultat. Dessa har sedan stegvis lett oss närmare vårt mål, vilket var att formulera en formel för g(a,b) samt en formel för n(a,b), som vi bevisat att den stämmer. I uppgiften E bevisade vi att vår formel för g(a,b) stämde och i uppgiften H bevisade vi n(a,b).
Formlerna som vi kom fram till var:

$$g(a,b) = (a - 1)\,(b - 1) - 1$$
$$n(a,b) = [(a - 1)(b - 1)] / 2$$

Se vidare i resultat för utförligare förklaring.

Resultat

Tillvägagångssätt

Vi har inte haft något enskilt arbete p.g.a. att det inte gick att dela upp uppgifterna. Det eftersom att för att kunna göra en uppgift måste du ha resultatet som du kom fram till i föregående uppgift. Dessutom var det lättare att lösa uppgifterna tillsammans och att förstå hur man ska tolka resultatet.
Vårt arbete byggdes upp av systematiskt räknande, vi behövde alltså inte leta information eller liknande. Detta då vi har ett annorlunda projekt som bara kan göras på ett sätt.
Vi började med att göra en planering, se bilaga (2), som vi visste att vi skulle hålla med god marginal. Detta gjorde att vi inte kände oss pressade och kunde arbeta bättre i ett högre tempo. Vi ville också få så mycket som möjligt gjort på höstterminen, eftersom vi båda får mer att göra till våren. Summan av dessa faktorer har gjort att vi blev klara med vårt arbete under höstterminen, förutom den muntliga presentationen.

Resultat

Tabell (a,b)

a = 5   b = 9

*   5 = a
¤   9 = b
*   10 = 2a
$ 14 = a + b
*   15 = 3a
¤   18 = 2b
$ 19 = 2a + b
*   20 = 4a
    23 = a + 2b
$ 24 = 3a + b
*   25 = 5a
¤   27 = 3b
    28 = 2a + 2b
$ 29 = 4a + b
*   30 = 6a
    32 = a + 3b
    33 = 3a + 2b
$ 34 = 5a + b
*   35 = 7a
¤   36 = 4b
    37 = 2a + 3b
    38 = 4a + 2b
$ 39 = 6a + b
*   40 = 8a
    41 = a + 4b

42 = 3a + 3b
43 = 5a + 2b
$ 44 = 7a + b
¤ 45 = 9a eller 5b
46 = 2a + 4b
47 = 4a + 3b
48 = 6a + 2b
$ 49 = 8a + b
* 50 = 10a eller a + 5b
51 = 3a + 4b
52 = 5a + 3b
53 = 7a + 2b
¤ $ 54 = 9a + b eller 6b
* 55 = 11a eller 2a + 5b
56 = 4a + 4b
57 = 6a + 3b
58 = 8a + 2b
$ 59 = 10a + b
* 60 = 3a + 5b eller 12a

Teckenförklaringar finns i uppgift **A.**

A

Tecknen visar återkommande mönster, samma tecken betyder samma mönster.
För att se att man kan betala följande belopp,

5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, …
se föregående tabell.

Man kan se olika mönster i tabellen, vissa mer betydande är andra. Mönstret visar att kombinationer med a, ex. 2a eller 2a + b, återkommer med samma intervall. Förutsatt att de kan bilda de mindre talen i början. Intervallen är: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4,……4. (överstiger ej 4, eftersom att a = 5 vilket medför att var femte belopp kan betalas) Detta gäller för mönstret betecknat med (*) och visar antalet tal som finns mellan intervallen.
B ensamt (¤), ex. 2b, 5b, återkommer med intervallen: 3, 5, 7, 8, 8,…8 (överstiger ej 8 då b = 9, vilket medför att var nionde belopp kan betalas.)
Mönstret med priser man kan få visar också att antalet mellanrum återkommer. Priserna som man inte kan få återkommer med intervallen: 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, …0. Priserna som du kan få i rak följd (27, 28, 29, 30) återkommer med samma intervall, fast tvärtom: 1, 2, 2, 3, 3, 4, sedan alla priser. Det finns en vacker symmetri mellan de belopp man kan betala och de man inte kan betala. Se bilaga (3).

B

Enligt tabellen kan man betala alla belopp f.o.m. 32, då du kan betala fem belopp i följd (då a = 5). Om a = 6 och a < b så behöver man kunna betala 6 belopp i följd.
Vi kan visa att alla belopp ≥ 32 kan betalas med a och b.

$b = 2a - 1$ $\quad 32 = a + 3b \Rightarrow a + 3(2a - 1) \Rightarrow a + 6a - 3 \Rightarrow 7a - 3$

$33 = 3a + 2b \Rightarrow 3a + 2(2a - 1) \Rightarrow 3a + 4a - 2 \Rightarrow 7a - 2$

$34 = 5a + b \Rightarrow 5a + 1(2a - 1) \Rightarrow 7a - 1$

$36 = 4b \Rightarrow 4(2a - 1) \Rightarrow 8a - 4 = 7a + 1$

$37 = 2a + 3b \Rightarrow 2a + 3(2a - 1) \Rightarrow 2a + 6a - 3 \Rightarrow 7a + 2$

$38 = 4a + 2b \Rightarrow 4a + 2(2a - 1) \Rightarrow 4a + 4a - 2 \Rightarrow 7a + 3$

Här kan man se att mönstret bildar först 7a – 3 sedan vidare till 7a +3. Det ökar alltså kontinuerligt med ett steg i taget, vilket var vad vi skulle visa.

C

Med g(a,b) menar vi det *högsta pris* som man inte kan betala. När g(a,b) saknar lösning betyder det att man kan betala alla priser alternativt att antalet priser man inte kan betala är oändligt.

a = 5 b = 1

1 = b	I och med att b = 1 kan man få alla priser. Det finns
2 = 2b	alltså inget högsta pris som man inte kan betala.
3 = 3b	g(5,1) = saknar lösning
4 = 4b	
5 = a eller 5b	
6 = a + b eller 6b	

a = 5 b = 2

2 = b	Det högsta priset man inte kan betala är 3.
4 = 2b	g(5,2) = 3
5 = a	
6 = 3b	
7 = a + b	
8 = 4b	
9 = a + 2b	
10 = 2a eller 5b	
11 = a + 3b	

a = 5   b = 3

3 = b   Det högsta pris man inte kan betala är 7,
5 = a   g(5,3) = 7.
6 = 2b
8 = a +b
9 = 3b
10 0 2a
11 = a + 2b
12 0 4b

a = 5   b = 4

4 = b   Det högsta priset man inte kan betala är 11.
5 = a   g(5,4) = 11
8 = 2b
9 = a + b
10 = 2a
12 = 3b
13 = a + 2b
14 = 2a + b
15 = 3a
16 = 4b

a = 5   b = 5

5 = a eller b   Det finns ej ett högsta pris som man kan betala.
10 = 2a eller 2b eller a + b   g(5,5) = oändligt.

a = 5   b = 6

5 = a   Det högsta priset man inte kan betala är 19.
6 = b   g(5,6) = 19
10 = 2a
11= a + b
12 = 2b
15 = 3a
16 = 2a + b
17 = a + 2b
18 = 3b
20 = 4a
21 = 3a + b
22 = 2a + 2b
23 = a + 3b
24 = 4b
25 = 5a

a = 5   b = 7

5 = a
7 = b
10 0 2a
12 = a + b
14 = 2b
15 = 3a
17 = 2a + b
19 = a + 2b
20 = 4a
21 0 2b
22 = 3a + b
24 = 2a + 2b
25 = 5a
26 = a + 3b
27 = 4a + b
28 = 4b

Det högsta pris som man inte kan betala är 27.
g(5,7) = 27

a = 5   b = 8

5 = a
8 = b
10 = 2a
13= a + b
15 = 3a
16 = 2b
18 = 2a + b
20 = 4a
21 = a + 2b
23 = 3a + b
24 = 3b
25 = 5a
26 = 2a + 2b
28 = 4a + b
29 = a + 3b
30 = 6a
31 = 3a + 3b
32 = 4b

Det högsta priset man inte kan betala är 27.
g(5,8) = 27

a = 5   b = 9

Se första tabellen i uppgift A
g(5,9) = 31

a = 5 b = 10

5 = a
10 = 2a eller b
15 = 3a eller a + b

Det finns ej ett högsta pris man kan betala.
g(5,10) = oändligt

a = 5 b = 11

5 = a
10 = 2a
11 = b
15 = 3a
16 = a + b
20 = 4a
21 = 2a + b
22 = 2b
25 = 5a
26 = 3a + b
27 = a + 2b
30 = 6a
31 = 4a + b
32 = 2a + 2b
33 = 3b
35 = 7a
36 = 5a + b
37 = 3a + 2b
38 = a + 3b
40 = 8a
41 = 6a+ b
42 = 4a + 2b
43 = 2a + 3b
44 = 4b
45 = 9a

Högsta priset som man inte kan betala är 39.
g(5,11) = 39

a = 5   b = 12

5 = a
10 = 2a
12 = b
15= 3a
17 = a + b
20 = 4a
22 = 2a + b
24 = 2b
25 = 5a
27 = 3a + b
29 = a + 2b
30 = 6a
32 = 4a + b
34 = 2a + 2b
35 = 7a
36 = 3b
37 = 5a + b
39 = 3a +2b
40 = 8a
41 = a + 3b
42 = 6a + b
44 = 4a + 2b
45 = 9a
46 = 2a + 3b
47 = 7a + b
48 = 4b

Det högsta priset man inte kan betala är 43.
g(5,12) = 43

Sammanställning av samtliga g(5,b):

g(5,1) = saknar lösning

g(5,2) = 3
g(5,3) = 7
g(5,4) = 11
g(5,5) = oändligt
g(5,6) = 19
g(5,7) = 23
g(5,8) = 27
g(5,9) = 31
g(5,10) = oändligt
g(5,11) = 39

g(5,3) – g(5,2) = 7 – 3 = 4
:
:
:
g(5,11) – g(5,9) = 39 – 31 = 8

Mönstret av g(5, b) då 1 = b = 11 visar att det är fyra tal till nästa pris som man inte kan betala. Efter tre lösningar till g(5,b) är det åtta tal till nästa g(5,b), detta eftersom att g(5,b) däremellan saknar lösning på grund av att man kan betala alla priser eller på grund av att g(5,b) är oändligt.

D

I sammanställningen ovan ser du för vilka värden på b som g(5,b) existerar, samt vilka värden g(5,b) får.

g(5,b) existerar inte då b är delbart med 5 eller när b = 1. Om b är delbart med 5 så är det en multipel av a, d.v.s. b dividerat med a blir ett heltal. Detta medför att man inte kan få alla tal, se exempel g(5,10) i tabellen ovan. g(a,b) återkommer då regelbundet med ett intervall med fyra priser man inte kan betala mellan varje pris man kan betala.
När b = 1 kan man få alla priser, d.v.s. det finns inte ett högsta pris man inte kan betala. g(a,b) existerar ej.

$g(5,b) \Rightarrow 4(b - 1) - 1$
Denna fungerar endast då b inte är delbart med 5.
Ex. $g(5,8) \Rightarrow 4(8 - 1) - 1 \Rightarrow 27$

Generellt blir formeln $g(a,b) = (a - 1)(b - 1) - 1$
Ex. $g(5,11) \Rightarrow (5 - 1)(11 - 1) - 1 \Rightarrow 39$

E

I denna uppgift delas beviset in i tre delar, då det blir lättare att förstå.

1

Låt a och b vara relativt prima heltal (den enda gemensamma faktorn är 1). Ett heltal c kan skrivas med formeln

$$c = ma + nb.$$

där $0 \leq n < a$. Då är $m \geq 0$ om och bara om c kan skrivas med formeln

$$c = m'a + n'b$$

för några hela tal $m' \geq 0$ och $n' \geq 0$.

Bevis:
Om $m \geq 0$ är det klart att formeln $c = ma + nb$ ger formeln $c = m'a + n'b$ med $m' = m$ och $n' = n$.
Omvänt, om $c = m'a + n'b$ med $m' \geq 0$ och $n' \geq 0$ använder vi en hjälpsats

$$n = qa + r$$

till att skriva $n' = qa + r$ med $0 \leq r < a$. Här är $q \geq 0$ eftersom $n' \geq 0$ och $a > r$.
Vi får

$$c = m'a + n'b \Rightarrow m'a + b(qa + r) \Rightarrow a(m' + qb) + rb .$$

I det här uttrycket är $m' + qb \geq 0$ eftersom m', q, b alla är större eller lika med 0 och $r \geq 0$.

Sätter vi $m = m' + qb$ och $n = r$ har vi därför skrivit c på formeln $c = ma + nb$ där $m \geq 0$ och $0 \leq n < a$, som vi ville.

2

Låt a och b vara relativt prima positiva heltal. För vart heltal c har vi att ett av talen c och (ab – a – b – c), men inte båda, kan skrivas på formeln.

$$ma + nb$$

där $m \geq 0$ och $n \geq 0$.

Bevis:

Vi vet nu att c kan skrivas både med formeln c = ma + na och c = m'a + n'b. Alltså är dessa formler lika med varandra ma + nb = m'a + n'b. Detta kan också skrivas

$$a(m - m') = b(n' – n).$$

Vi har nu

$$ab – a – b – c = ab – a – b – ma – nb = (-1 – m)a + (a – 1 – n)b,$$

Olikheten $0 \leq n < a$ medför olikheten $0 = a – 1 – n < a$.. Det följs därmed av formeln c = ma + nb med m' = -1 – m och n' = (a – 1 – n) att ab – a – b – c kan skrivas på formeln m'a + n'b om och bara om m' = -1 – m = 0.

Vi har att antingen m = 0 eller (-1 – m) = 0, och vi kan inte ha bägge olikheterna samtidigt. Därför har vi att antingen kan c eller ab – a - b – c skrivas på formeln ma + nb, men båda kan inte skrivas på denna formel.

3

Låt a och b var relativt prima positiva heltal. Vi är intresserade av vilket tal som kan skrivas på formeln ma + nb med m och n som positiva heltal. Det är klart att 0 kan skrivas på denna formel med m = n = 0, men att inget av talen –1, -2, -3, … kan skrivas så eftersom alla talen på denna formel är positiva. Därför kan alla talen ab – a – b + 1, ab – a – b +2, … skrivas på formeln ma + nb med m = 0 och n = 0, men att talet ab – a – b – 0 = ab – a – b inte kan skrivas på denna formel.

F

Med n(a,b) menar vi det *antal priser* som man inte kan betala.
Se tidigare tabeller, där vi visat de priser man kan betala för att se n(a,b). Här är en sammanställning:

n(5,1) = saknar lösning (man kan betala alla priser)
n(5,2) = 2
n(5,3) = 4
n(5,4) = 6
n(5,5) = saknar lösning (g(a,b) är oändligt, alltså är n(a,b) också oändligt)
n(5,6) = 10
n(5,7) = 12
n(5,8) = 14
n(5,9) = 16
n(5,10) = saknar lösning (g(a,b) är oändligt, alltså är n(a,b) också oändligt)

Här gissar vi en formel för n(a,b):

$$n(a,b) \Rightarrow [(a-1)\,(b-1)]\,/\,2$$

Då a = 5 kan formeln förkortas

$$n(5,b) \Rightarrow [(5-1)\,(b-1)]\,/\,2 \Rightarrow [4(b-1)]\,/\,2 \Rightarrow 2(b-1)$$

Här ser man ett exempel på att vår formel för n(a,b) stämmer:

$$n(5,7) \Rightarrow 2(7-1) \Rightarrow 2 * 6 = 12$$

G

a = 4 b = 7

4 = a
7 = b
8 = 2a
11 = a + b
12 = 3a
14 = 2b
15 = 2a + b
16 = 4a
18 = a + 2b
19 = 3a + b
20 = 5a
21 = 3b
22 = 2a + 2b

g(4,7) = 17

$$(a-1)(b-1)-1 \Rightarrow (4-1)(7-1)-1 = 17$$

n(4,7) = 9

$$[(a-1)(b-1)]\,/\,2 \Rightarrow [(4-1)(7-1)]\,/\,2 = 9$$

$a = 8 \quad b = 3$

$3 = b$ $\quad$ $g(8,3) = 13$
$6 = 2b$
$8 = a$ $\quad$ $(a - 1)(b - 1) -1 \Rightarrow (8 - 1)(3 - 1) -1 = 13$
$9 = 3b$
$11 = a + b$ $\quad$ $n(8,3) = 7$
$12 = 4b$
$14 = a + 2b$ $\quad$ $[(a - 1)(b - 1)] / 2 \Rightarrow [(8 - 1)(3 - 1)] / 2 = 7$
$15 = 5b$
$16 = 2a$
$17 = a + 3b$

g(a,b) och n(a,b) existerar ej då:

- a och b är lika
- a och b båda är jämna tal
- a / b = n eller b / a = n då n är ett positivt heltal.

De formler vi kommit fram till är:

$$g(a,b) = (a - 1)(b - 1) -1$$
$$n(a,b) = [(a - 1)(b - 1)] / 2$$

H

Den formel vi gissade för n(a,b) bevisade vi med hjälp av symmetriaxeln (3). Här ser man att om t.ex. g(a,b) = 7 så har man åtta tal mellan 0 och 7. Dividerar man dessa med två får man fyra, vilket är lösningen till n(a,b), för samma a och b. Symmetriaxeln ligger då mellan tre och fyra.

Nåddes de mål som sattes upp i projektbeskrivningen?

De mål som vi satte upp var att finna formeln g(a,b) samt bevisa den, dessutom skulle vi finna formeln n(a,b) och bevisa den. Under arbetets gång bestämdes att vi inte behövde bevisa n(a,b), då vi förkortade arbetet. Trots att vi inte uppfyllde de mål som vi satt upp i början, så har vi ändå uppfyllt de mål som vi tillsammans med Dan Laksov och Åke Johansson kommit fram till.

Diskussion

Projektets mål:

Målet var att finna samband och algebraiska utryck för vilka tal som är möjliga och antalet av dessa, samt bevisa de algebraiska uttrycken.
Som vi nämnde tidigare så nådde vi inte det ursprungliga målet. Men vi nådde däremot de mål som vi satte upp tillsammans med våra handledare i ett senare skede.
Skälen till att vi inte nådde det ursprungliga målet var att det skulle bli för svårt, närmast omöjligt, för oss att lösa uppgifterna, enligt Laksov.

Planeringen:

Vi höll inte vår planering, men på ett positivt sätt. Vi låg under hela arbetets gång flera veckor före vår planering.
Detta berodde på att vi redan från arbetets start satte upp mål som vi visste att vi skulle klara med goda marginaler. Vi gjorde detta för att slippa pressa oss själva och känna att vi inte hann med det vi skulle. Detta skulle bara ha försämrat vårt arbete.

Arbetet i projektgruppen:

Vi har verkligen fungerat bra som grupp, vilket kanske har underlättats då vi bara är två personer och har ganska lika scheman. Vi har enkelt kunnat planera när vi skulle arbeta med projektet och hade flera återkommande fasta tillfällen per vecka. Vi hade inte heller några svårigheter att vara flexibla då andra ämnen inkräktade på våra planer. Vid sådana tillfällen arbetade vi helt enkelt vid ett annat tillfälle.
Vi har inte haft några problem, allt har löpt fint. Det är inget som har fungerat dåligt eller mindre bra. Den enda svårigheten var att planera när vi skulle åka till KTH och träffa Laksov. Men det löste vi utan komplikationer.

Lärdomar inför framtiden:

En viktig lärdom är att det är väldigt viktigt att planera sin tid rätt och att göra detta redan från början. Planera hellre med för goda marginaler, så att du slipper känna press.
Det är positivt med en mindre grupp med likasinnade personer. Detta gör att det är lättare att komma överens och hitta tider då alla kan träffas. Det är också lättare att fördjupa sig och komma fram till resultat om man inte ”har för många hjärnor”. ”Ju fler kockar, ju sämre soppa.”
Det är viktigt att välja ett projekt som är roligt, som intresserar dig. Då arbetar du bättre och skjuter det inte på framtiden och slipper stressa på slutet.

Övrigt:

Vi är i allmänt mycket nöjda med vårt arbete och arbetssätt. Allt har gått bättre än förväntat och vi har haft färre problem än vi trott vi skulle ha.

Källförteckning

- *ABC i projektarbete – en praktisk handbok* av Sten Albetrsson , Bonniers förlag 2002
- *Norsk ordbok* – Bra Böckers förlag
- ”*Välj specialarbete i matematik*” av Dan Laksov, KTH.
  ISBN: 91-7170-851-0 THD AB Bandhagen 1989

Bilagor

1. Projektbeskrivning
2. Projektmall
3. Symmetriaxel

Projektbeskrivning

Namn: Myntväxling

Projektgrupp: Anna Priemer Nv3md, Hanna Ström Nv3na

Handledare: Åke Johansson

Uppdragsgivare: Dan Laksov, KTH

Mål: Att finna samband och algebraiska utryck för vilka tal som är möjliga och antalet av dessa, samt bevisa de algebraiska uttrycken.

Arbetssätt: Vi arbetar fram algebraiska uttryck genom att fina mönster. Dessa diskuteras sedan tills det att vi finner en lösning. Det förekommer ej enskilt arbete.

Deadline: Vecka 12.

Redovisning: Vecka 14. Vi redovisar muntligt med en power point presentation där vi kort och enkelt beskriver problemen och visar hur vi kommit fram till de algebraiska uttrycken.

Resurser: Vi arbetar i skolans lokaler där vi använder oss av papper, penna och annat skrivmaterial. Eventuella besök för hjälp av D. Laksov på KTH.

Ekonomi: Vi förväntar oss inte några kostnader, förutom transporten till och från KTH.

Övrigt: Detta är ett annorlunda projekt då större delen av vår tid går åt till att tänka ut matematiska uttryck, dessa timmar är svårare att redovisa jämfört med andra projekt.

Godkänt av handledare:

Namn	Datum

Projektmall

Arbetsuppgifter	Ansvarig	Tidsplan
A = Anna P. H = Hanna S.		
Förarbete		
Projektbeskrivning	A, H	v. 37
Projektmall	A, H	v. 37
Översättning	A, H	v. 36
Uppgifter		
A	A, H	v. 36
B	A, H	v. 36
C	A, H	v. 37
D	A, H	v. 37
E	A, H	v. 38
F	A, H	v. 39
G	A, H	v. 40, 41
H	A, H	v. 41, 42
I	A, H	v. 43
J	A, H	v. 43, 45
K	A, H	v. 46
L	A, H	v. 47
M	A, H	v. 48
N	A, H	v. 49
Efterarbete		
Renskrivning av arbete	A, H	v. 2
Rapport	A, H	v. 3
Presentationen	A, H	v. 6
Utvärdering	A, H	v. 12

Vår planering stämmer inte med det tempo vi arbetade i, vi har jobbat mycket hårdare och effektivare än vi förväntade oss. Dessutom har vi kortat ned arbetet.
Vi blev klara med renskrivningen samt korrekturläsningen vecka 51.

Symmetriaxel för g(5,9)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
@	a	a	a	a	@	a	a	a	@	@	a	a	a	@	@	a	a

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
@	@	@	a	a	@	@	@	a	@	@	@	@	a	@	@	@	@

symmetriaxel

Från och med 32 kan man få alla tal.

Symmetriaxeln delar tabellen som en spegel mellan priserna 15 och 16. På ena sidan finns två priser man kan betala (@) och på andra sidan finns det två priser man inte kan betala (a), osv.