Två formler för talet π

Leif Abrahamsson

Uppsala Universitet

Denna uppgift syftar till att härleda två formler för talet π. De två formlernas härledning är oberoende av varandra och kan således var för sig utgöra grunden till ett specialarbete. Möjligen kan inledningen också tjäna som en introduktion till algebraiska och transcendenta tal, om någon som läser detta hellre skulle vilja skriva ett specialarbete om sådant.

Inledning. Formeln för arean A av en cirkel med radie r ges som bekant av $A = \pi r^2$. Denna formel säger att om vi vet de exakta värdena av π och r, så kan vi beräkna det exakta värdet av arean. Tyvärr (?) förhåller det sig ju dock så att man i den fysikaliska verkligheten endast har tillgång till mätinstrument som tillåter att t ex radien hos en cirkel endast kan bestämmas med ett visst mått av noggrannhet – aldrig exakt. När cirkelns radie väl mätts upp behövs ett numeriskt värde på talet π för att vi skall få veta vad arean (ungefär) är.

Vad som används när man utför numeriska beräkningar (för hand eller med hjälp av datorer) är decimal– (binär–) bråksutveckling av de reella tal man för tillfället räknar med – talen decimalbråksutvecklas och man tar med så många decimaler som noggrannheten kräver.

T ex $\qquad \dfrac{1}{3} = 0,333333 \quad$ med 6 decimalers noggrannhet

$$\frac{1}{7} = 0,1428571 \quad \text{med 7 decimalers noggrannhet.}$$

Olika reella tal är olika *svåra* att decimalbråksutveckla: heltalen $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ är det ju inga problem med, de rationella talen (alla tal som är på formen p/q där p och q är heltal och $q \neq 0$, speciellt är heltal också rationella tal – tag $q = 1$) är också lätta att handha (bl a är det så att varje rationellt tal har en decimalbråksutveckling där siffrorna efter ett tag återkommer periodiskt). Reella tal som ej har en periodisk decimalbråksutveckling kallas irrationella (exempel på sådana är $\sqrt{2}$, π, e för att nämna några). Ett annat sätt att uttrycka att ett reellt tal x är rationellt är att säga att x är lösning till en ekvation

$$qx - p = 0\,, \quad p,\, q \text{ heltal och } q \neq 0.$$

Eller, uttryckt litet annorlunda, rationella tal är lösningar till första grads ekvationer med heltalskoefficienter (talen p och q kallas koefficienterna i ekvationen ovan). Om man nu generaliserar lite och tittar på andragrads ekvationer med heltalskoefficienter:

$$px^2 + qx + r = 0, \quad p,\, q,\, r \text{ heltal och } p \neq 0,$$

t ex $x^2 - 2 = 0$ som har en lösning $\sqrt{2}$, så får vi med fler reella tal – inte bara de rationella. Allmänt kallar man ett reellt tal x algebraiskt om x är lösning till någon ekvation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0,$$
$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \text{ heltal och } a_n \neq 0.$$

Så $\sqrt{2}$ är ett algebraiskt tal, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ är ett annat. Det sistnämnda är lösning till ekvationen

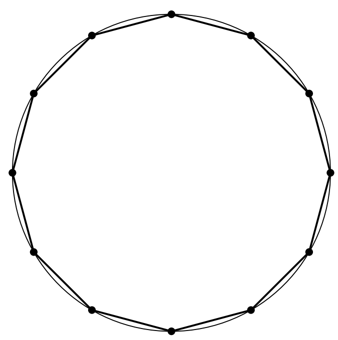
$$(x - \sqrt{1+\sqrt{2}})(x + \sqrt{1+\sqrt{2}})(x^2 - 1 + \sqrt{2}) = x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

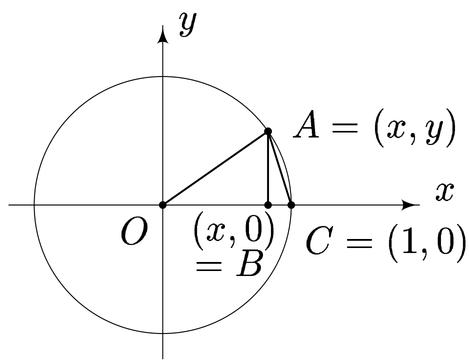
UPPGIFT.(a) Hitta en fjärdegradsekvation med heltalskoefficienter och med $x = \sqrt{10 - \sqrt{2}}$ som en lösning.
(b) Låt a och b vara två heltal båda större än noll. Försök visa att $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ är ett algebraiskt tal, dvs försök hitta en ekvation med heltalskoefficienter som har $x = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ som en lösning.

Nu kan man fråga sig: Är alla reella tal algebraiska tal? Dvs är varje reellt tal lösning till någon ekvation med heltals koefficienter? Svaret är nej! Talen π och e är exempel på icke–algebraiska tal (i själva verket utgör de algebraiska talen en förhållandevis liten del av de reella talen – de är i en viss mening inte *fler* till antalet än heltalen!). De icke–algebraiska heltalen kallas transcendenta tal och transcendenta tals decimalbråksutvecklingar är mer *komplicerade* än algebraiska tals, för ett givet algebraiskt tal finns det ju en ekvation med heltalskoefficienter till vilken det givna talet är en lösning, och det finns *snabba* metoder att t ex med hjälp av en dator finna approximativa lösningar till sådana ekvationer (en sådan metod är *Newton–Raphsons metod*). Detta gör det önskvärt att hitta formler för transcendenta tal, t ex talet π som uttrycker π med hjälp av produkter/summor av algebraiska tal. Exempel på två sådana formler presenteras nedan.

En annan historisk notis värd att nämna i sammanhanget är den om cirkelns kvadratur. De gamla grekiska matematikerna formulerade problemet att med hjälp av passare och linjal konstruera en kvadrat med samma area som cirkeln med radie 1 – dvs en kvadrat med area π. Detta förutsätter att man kan konstruera en sträcka med längd $\sqrt{\pi}$ (kvadratens area är ju produkten av sidlängderna). Nu är det dock så att samtliga sträckor som kan konstrueras, med passare och linjal, utgående från en cirkel med radie 1, är algebraiska tal och det dröjde därför fram till 1882 innan grekernas problem fick svaret att det är omöjligt att konstruera en sådan kvadrat i och med att en matematiker vid namn Lindemann visade att π är transcendent. (Visserligen ryktas det att en amerikansk domstol en gång lagstiftade att talet π är lika med 3, med stöd av en passus i bibeln, men detta får nog betraktas som en *juridisk sanning.*)

Viète's formel. Den formel för π som presenteras här upptäcktes av Francois Viète 1579. Som utgångs-punkt har vi att cirkeln med radie 1 har arean π, och för att få fram ett approximativt värde på π väljer vi att approximera cirkeln med geometriska figurer vars areor lätt kan räknas ut i termer av algebraiska tal. Om vi skriver in en regelbunden månghörning i cirkeln enligt figuren nedan, är det klart att ju fler hörn vi väljer desto bättre ansluter månghörningen till cirkeln och månghörningens area blir en approximation av cirkelns area.





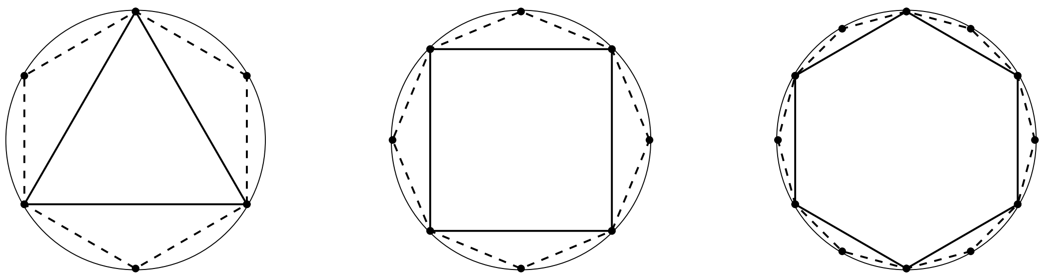
UPPGIFT. Bestäm arean av trianglarna OAC och OAB och visa, med hjälp av att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy = 2(\text{area } OAB) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

med avseende på y, att

$$\text{area } OAC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16(\text{area } OAB)^2}}{2}}. \tag{1}$$

Låt nu P_m vara en regelbunden $m-$hörning inskriven i cirkeln och låt A_m vara arean hos P_m. Några exempel:



$m = 3$ $(m = 6)$ $m = 4$ $(m = 8)$ $m = 6$ $(m = 12)$

Varje P_m består av m stycken lika stora trianglar och man ser ju lätt att A_m är $=$ (antalet trianglar i P_m)$\times$(arean hos en av trianglarna).

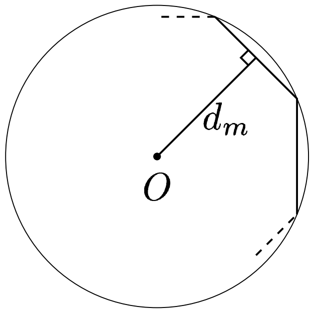
UPPGIFT. Härled, med hjälp av (1), formeln

$$A_{2m} = \frac{m}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-(2A_m/m)^2}}. \tag{2}$$

Genom att använda formel (2) för $m = 2^n$ upprepade gånger, med början för $m = 2^2 = 4$, $A_4 = 2$ kan approximationer av π erhållas.

UPPGIFT. Gör ett datorprogram som, med hjälp av den härledda formeln, beräknar approximationer av π. (Dvs beräkna areorna A_{2^n} för några värden på heltalet n.)

Låt nu d_m beteckna det vinkelräta avståndet från origo till en sida i P_m enligt figur:



Via sambandet

$$\frac{\text{area }(OAB)}{\text{area }(OAC)} = OB$$

kan man härleda att $A_m/A_{2m} = d_m$. (Försök göra detta!) Alltså är t ex $A_4/A_8 = d_4$, $A_8/A_{16} = d_8$ vilket ger att $A_8 = A_4/d_4$ och därmed $A_8/A_{16} = A_4/(A_{16}d_4) = d_8$, dvs $A_4/A_{16} = d_4 \cdot d_8$.

UPPGIFT. Härled formeln

$$\frac{2}{A_{2^n}} = d_4 \cdot d_8 \cdot \ldots \cdot d_{2^{n-1}}. \tag{3}$$

Ur detta samband ser vi att $A_{2^n} = 2 \cdot (d_4 \cdot d_8 \cdot \ldots \cdot d_{2^{n-1}})^{-1}$ och om vi nu hittar något sätt att beräkna avstånden d_m så har vi alltså en formel som ger godtyckligt bra approximationer av π.

Ur figuren med d_m ovan syns att $d_m = \cos\frac{\pi}{m}$. Vi behöver alltså en värde för $\cos\frac{\pi}{m}$ då $m = 2^n$ för ett heltal $n \geq 2$, för att använda (3).

UPPGIFT. Använd formeln

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

för att visa att

$$d_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$d_8 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$d_{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

osv.

Tillsammans ger nu det vi visat Viète's formel:

$$\frac{2}{A_{2^n}} = d_4 \cdot d_8 \cdot \ldots \cdot d_{2^{n-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

och ur detta kan vi ju lösa ut A_{2^n} och erhålla approximationer av π precis som ovan.

Uppgift. Gör ett datorprogram som med hjälp av formeln för $2/A_{2^n}$ ovan approximerar värdet på π. Jämför också dina värden med den bifogade tabellen över π:s decimalbråksutveckling.

Wallis' produkt. Wallis' produkt (från 1665) är, till skillnad från Viète's formel, kanske inte så geometrisk, utan bygger väsentligen på integration av trigonometriska funktioner och lite uppskattningar.

Uppgift. Gör en lämplig partiell integration i vänsterledet för att visa att

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2.$$

Härled ur detta att

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

(Ledning: Gör upprepade partiella integrationer!) Härled också ur de båda sista likheterna att

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx}.$$

Om vi nu kan visa att kvoten mellan integralerna i den ovanstående formeln är nära 1 då n är stort, så har vi här ytterligare en approximation av talet π, i termer av rationella tal denna gång!

UPPGIFT. Utnyttja olikheterna

$$0 < \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x \quad \text{för } 0 < x < \pi/2$$

och visa att

$$1 \le \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx} \le \frac{2n+1}{2n}.$$

(Ledning: För den högra olikheten, gör först en partiell integration enligt ovan i nämnaren.)

Eftersom talen $(2n+1)/2n = 1 + 1/2n$ kan fås godtyckligt nära 1 genom att n väljes stort ser vi alltså att produkterna

$$2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

kan fås godtyckligt nära π. Denna produkt kallas Wallis' produkt.

Uppgift. Gör ett datorprogram som approximerar π med hjälp av Wallis' produkt. Jämför resultatet med den föregående uppgiften. Tycks någon av metoderna ge en *snabbare* väg till approximationer av π? Jämför också dina approximationer med den bifogade tabellen över π:s decimalbråksutveckling.

Litteratur

Merparten av materialet till detta specialarbete har jag hittat i boken
Spivak, M., *Calculus.* Publish or Perish Inc., Berkeley, Calif. 1980,
en bok som för inte så länge sedan användes i undervisningen av nybörjarstudenter i matematik vid Uppsala Universitet.

Mer om reella tal (bl a π) kan man läsa i
Brun, V., *Alt er tall.* A.s John Griegs Boktrykkeri, Bergen 1964.

Flegg, G., *Numbers – their history and meaning.* Penguin Books Ltd 1984.

Uppslagsverket *Sigma* (som väl torde finnas på de flesta gymnasieskolor) innehåller också en del lättillgängligt material rörande begreppen ovan (om än inte så mycket).

I *Scientific American*, februari 1988, finns en artikel om Ramanujan och π där man kan läsa om andra sätt att beräkna π.