En trafikmodell

Leif Arkeryd

Göteborgs Universitet

Tänk dig en körfil på en landsväg eller motorväg, modellerad som x–axeln i positiv riktning (fig.1), och med krysset x_j som mittpunkten för bil nummer j på vägen.

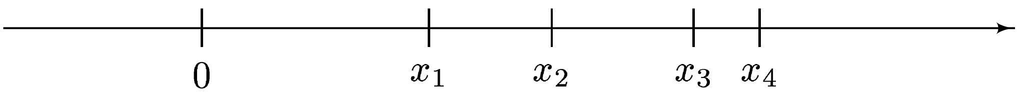


Fig.1

Då blir förstås $\dot{x}_j(t) = dx_j/dt$ hastigheten och $\ddot{x}_j(t) = d^2x_j/dt^2$ accelerationen av bil j. För enkelhets skull antar vi att alla bilar har samma längd L.

Om du sitter på en kulle eller ett berg och tittar på vägen i fjärran, så ser du i stället för de enskilda bilarna en sammanhängande ström (åtminstone i tät trafik), som verkar ha en hastighet $u(x,t)$ i varje punkt x och vid varje tidpunkt t ($u(x,t)$ kallas ett *hastighetsfält*). Du upplever också att bilströmmen har en *täthet* $\varrho(x,t)$ som beror också den på x och t. I lämpliga enheter kan antalet bilar N på sträckan $[0,X]$ anges som $N = \varrho \cdot X$ om tätheten är likformig, och som $N(t) = \int_0^X \varrho(x,t)dx$ i det allmänna fallet (fig.2).

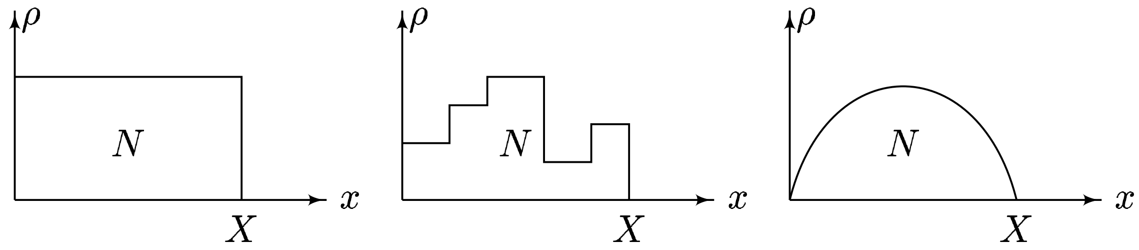


Fig.2

Det är klart att om X är hela vägens längd, så blir medelantalet bilar per längdenhet $\varrho = N/X$, och om $X = L$ så blir typiskt $\varrho(x,t) = 1/L$ om det finns en bil i punkten x, och $\varrho(x,t) = 0$ om det inte finns någon bil där. (För bil i blir dessutom $u(x_i(t),t) = \dot{x}_i(t)$.)

Således för att få en rimlig mening av begreppet biltäthet bör vi observera vägen bortifrån en punkt, där en bekvämt observerbar sträcka är mycket större än L och mycket mindre än vägens längd. Detta definierar begreppet naturlig skala för vägsträckor i den här diskussionen.

ÖVNING 1. Omsätt ovanstående i ett praktiskt experiment på någon kraftigt trafikerad vägsträcka $[0, X]$ i din närhet.

a) Fotografera vägsträckan med en halv timmes mellanrum under en halv dag, och upprätta för varje tidpunkt tre diagram som i fig.2.

b) Upprita för en lämplig tidpunkt en kurva som beskriver medeltätheten på sträckan $[0, x]$, $\bar{\varrho} = N(x)/x$ som funktion av x, $0 \le x \le X$. Observera att täthetskurvan fluktuerar kraftigt för små x för att stabiliseras när x blir större.

Om tätheten ϱ och hastigheten u är konstanta, d v s oberoende av x och t, så är *bilflödet* q, d v s antalet bilar som passerar en punkt x per tidsenhet, lika med $\varrho \cdot u$, d v s $q = \varrho \cdot u$. Detta gäller även om q, ϱ, u är tidsberoende och rumsberoende (varför?).

Om vägsträckan $[a,b]$ saknar till– och avfarter, så ges ändringen av antalet bilar där på tiden Δt, d v s $N(t+\Delta t)-N(t)$, av antalet bilar som kommer in i $x=a$ minus antalet som går ut i $x=b$, d v s av $\Delta t(q(a,t)-q(b,t))$. Tas nu gränsvärdet av

$$(N(t+\Delta t)-N(t))/\Delta t = q(a,t)-q(b,t),$$

så erhålls

$$\dot{N}(t)=q(a,t)-q(b,t), \text{ eller } \frac{d}{dt}\int_a^b \varrho(x,t)dx = q(a,t)-q(b,t).$$

Detta är en *konserveringslag i integralform (= global form)* för antalet bilar. Om derivatan får flyttas under integraltecknet ger detta

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\,\varrho(x,t)\,dx = q(a,t)-q(b,t). \tag{1}$$

Fast när en funktion som ϱ här beror på både variabeln t och parametern x, så talar man om den partiella derivatan med avseende på t och skriver detta $\frac{\partial}{\partial t}\varrho(x,t)$. Analogt om t betraktas som en parameter och x som variabel, så skrivs derivatan med avseende på x som $\frac{\partial}{\partial x}\varrho(x,t)$. Högerledet i (1) kan skrivas

$$q(a,t)-q(b,t)=\int_b^a \frac{\partial}{\partial x}\,q(x,t)dx = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\,q(x,t)dx,$$

och vi får alltså

$$\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\varrho(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\,q(x,t)\right)dx = 0.$$

Den enda kontinuerliga integrand som ger integralen noll för varje val av a och b är 0–funktionen. (Visa det!) Alltså gäller

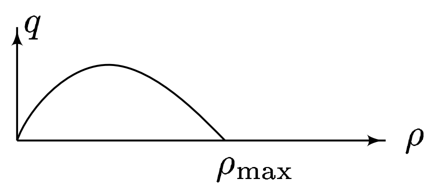
$$\frac{\partial}{\partial t}\,\varrho(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\,q(x,t)=0. \tag{2}$$

Ett samband som (2) mellan en funktion och dess partiella derivator kallas en *partiell differentialekvation*. Då ju $q = u \cdot \varrho$, kan den också skrivas

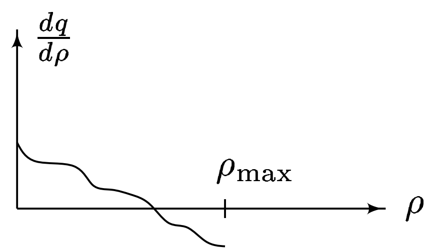
$$\frac{\partial}{\partial t}\,\varrho + \frac{\partial}{\partial x}\,(u \cdot \varrho) = 0. \tag{3}$$

Detta är den förra konserveringslagen för antalet bilar, fast nu i *differentialform (= lokal form)*. För att kunna lösa ekvationen (3) behövs information om hastighetsfältet u. Det är klart att u beror av trafiktätheten; därför är ett rimligt antagande $u = u(\varrho)$. Vi vet erfarenhetsmässigt att ju färre bilar, desto fortare kör bilisterna. Därför antar vi att, när vägen är tom, $u = u_{\max}$ är maximal, t ex en klar sommardag lika med bilarnas maximalhastighet på en tysk motorväg, eller lika med den maximalt tillåtna hastigheten på en svensk landsväg, medan den kanske bara är 20 km/tim en vinterdag med underkylt regn. Det är också rimligt att hastigheten minskar när tätheten ökar, det vill säga $\frac{\partial u}{\partial \varrho} \leq 0$ – ner till noll strax under $\varrho = \varrho_{\max} = 1/L$.

Eftersom flödet $q = \varrho u(\varrho)$, så gäller också $q = q(\varrho)$. Uppenbarligen är $q = 0$ om $\varrho = 0$, eller om $u(\varrho) = 0$ som för $\varrho = \varrho_{\max}$. Däremellan tar vi flödet positivt, och ett plausibelt utseende är



med bl a $\frac{d^2q}{d\varrho^2} < 0$, d v s $\frac{dq}{d\varrho}$ minskar då ϱ ökar. Detta ger $\frac{dq}{d\varrho}$ utseendet



ÖVNING 2. Beräkna q och rita kurvorna för $u(\varrho), q(\varrho)$ och $dq/d\varrho$ om $u(\varrho) = u_{\max}(1 - \varrho/\varrho_{\max})$ där $u_{\max}$ och $\varrho_{\max}$ är konstanter. Vad blir det maximala trafikflödet?

ÖVNING 3. Tänk dig en halvoändlig landsväg $0 \le x < \infty$ (alltså idealiserad av modelleringsskäl), och antag att $\varrho(x,t)$ är 0 för stora värden på x. Om det inte finns några av– eller påfarter, visa ur (2) att antalet bilar på vägen vid tiden t är

$$N(0) + \int_0^t q(0,s)ds.$$

ÖVNING 4. Om $x(t)$ är rörelsen av en bil i trafikflödet, så är $\dot{x}(t) = u(x(t),t)$, och accelerationen $\ddot{x}(t)$ ges av kedjeregeln

$$\frac{d}{dt}(u(x(t),t)) = \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x(t),t))\dot{x}(t). \tag{4}$$

Antag att accelerationen i detta fall också ges av $-a^2\varrho^{-1}\partial\varrho/\partial x$, med a en positiv konstant. Använd (3) för att visa att om $u = u(\varrho)$ ej är konstant så följer att $du/d\varrho = -a/\varrho$. Lös denna ordinära differentialekvation under randvillkoret $u(\varrho_{\max}) = 0$. Diskutera varför den ickekonstanta lösningen (som utmärkt beskriver mätdata från flera kraftigt trafikerade tunnlar i USA) inte kan vara särskilt bra som modell för små tätheter.

ÖVNING 5. Förklara utan att använda matematiska formler varför $\int_{a(t)}^{b(t)} \varrho(x,t)dx$ är konstant, d v s oberoende av t, om $a(t)$ och $b(t)$ är läget vid tiden t av två bilar som ligger i trafikflödet.

ÖVNING 6. Antag att u = konstant = c. Inför de nya variablerna $x' = x - ct$ och $t' = t$. Använd kedjeregeln (4) för att visa att konserveringslagen (3) övergår i ekvationen $\partial\varrho/\partial t' = 0$ i de nya koordinaterna.

För fix parameter x' får vi alltså $\varrho(x' + ct', t') =$ konstant. För olika x' kan konstanten väljas olika, som en funktion f av x', d v s $\varrho(x' + ct', t') = f(x')$, eller $\varrho(x, t) = f(x - ct)$. Således är ϱ konstant längs varje *karakteristisk* $x - ct$=konstant.

Övning 7. Rita för $t = 1, 2, 3$ kurvan $(x, \varrho(x, t))$ om $\varrho(x, 0) = (1 + \sin x)/10$ för $0 \leq x \leq \pi$ och $\varrho(x, 0) = 0$ annars, samt $u =$ konstant $= 10$. Du ser alltså en täthetsvåg som rör sig i x-axelns riktning.

Eftersom enligt (4)

$$\frac{d}{dt}(\varrho(x(t), t)) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\dot{x},$$

så gäller att en observatör i $x(t)$ vid tiden t ser ändringen i täthet som summan av täthetsändringen $\partial\varrho/\partial t$ i punkten $x(t)$, och förändringen som beror på att observatören rör sig in i ett område med kanske en annan trafiktäthet. Speciellt om $\dot{x} = c$, så följer observatören med strömmen och $d/dt(\varrho(x(t), t)) = 0$, d v s den ser ingen ändring i fallet $u = c$.

För att komma vidare i studiet av den här trafikflödesmodellen, kan du låna boken *Mathematical models* av R. Haberman (Prentice Hall 1977).

Övning 8. Använd den boken för att analysera vad som händer när

a) trafiken startar vid grönt ljus (avsnitt 72),
b) när trafiken stannar vid rött ljus (avsnitt 78),
c) hur chockvågor byggs upp i områden där trafiktätheten ökar (avsnitt 79–82).

På liknande sätt kan man diskutera flöden av gaser uppbyggda av individuella molekyler. Ekvationen blir snarlik, och man får också sådana ekvationer för andra konserverade storheter som energin. De här ekvationerna har varit kända i närmare 200 år, men att lösa dem utgör fortfarande ett aktivt och komplicerat forskningsområde inom matematiken, där nästan varje verkligt framsteg har fysikaliska och ingenjörsmässiga tillämpningar.