Vinkeln 60 grader kan inte tredelas med enbart passare och linjal

JÖRAN BERGH

CTH

Att tredela en given vinkel med enbart passare och linjal är ett klassiskt (ca 400 f Kr) geometriskt problem. Detta löstes på artonhundratalet med hjälp av en teori för ekvationers lösbarhet utvecklad av bl a Évariste Galois (1811–1832). Lösningen visar att en sådan tredelning i allmänhet är omöjlig. Dock är den möjlig för vissa vinklar.

- Ange några vinklar som kan tredelas med enbart passare och linjal.

De klassiska problemen med kubens fördubbling och cirkelns kvadratur har visats omöjliga att lösa med bara passare och linjal med samma metoder.

UPPGIFT: Visa att vinkeln 60° inte kan tredelas med bara passare och linjal.

Den klassiska lösningen på problemet är att visa att det är likvärdigt med att finna en lösning till en viss tredjegradsekvation med enbart kvadratrotsutdragningar.

Tredjegradsekvationen hänger ihop med tredelningen av vinkeln; kvadratrotsutdragningarna med konstruktioner som utnyttjar enbart passare och linjal.

Vi tittar först på tredelningen av vinkeln.

Ett samband mellan en vinkel och den tredubbla vinkeln finns i trigonometrin. Vi skall använda formeln

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

- Härled denna formel!

Om vi nu låter $3\alpha = 60^\circ$ så får vi

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

vilket är en tredjegradsekvation i $\cos\alpha = x$

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x.$$

Om man har en lösning x till denna ekvation ger det en möjlighet att konstruera vinkeln $20^\circ = 60^\circ/3$, och omvänt.

Antag nu att vi har bestämt en längdenhet t ex genom att dra en linje med hjälp av linjalen och där avsätta en sträcka med passaren.

- Visa att man kan konstruera (med endast passare och linjal) vinkeln α precis då man kan konstruera sträckan med längd $\cos\alpha$.

Vi ser nu att tredelningen av vinkeln 60° med enbart passare och linjal är likvärdigt med att konstruera en sträcka med längd x som är lösning till ekvationen $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$.

Vi skall nu undersöka vilka tal (sträckor) som kan konstrueras med enbart passare och linjal, då vi bestämt en längdenhet.

- Visa att alla tal av typen $a+b$, $a-b$, ab och a/b, där a och b är hela tal ($b \neq 0$) går att konstruera. (Ledning: Använd t ex likformighet på en topptriangel.)

Alla tal av typ p/q med p och q heltal, $q \neq 0$, kan alltså konstrueras: med andra ord alla rationella tal.

- Visa att $a \pm \sqrt{b}$ kan konstrueras om a och b är konstruerade men inte $\sqrt{b}$. (Ledning: Använd t ex likformighet i en rätvinklig triangel med en höjd från räta vinkeln.)

Vi vet nu att alla tal som kan fås ur de rationella talen genom ändligt många kvadratrotsutdragningar kan konstrueras med enbart passare och linjal. Men vi behöver veta vilka som inte går att konstruera för att nå vårt mål: ett nödvändigt villkor för konstruerbarhet.

- Visa att om ett tal är konstruerbart med enbart passare och linjal så måste det vara av formen $a \pm \sqrt{b}$ där a och b ($b \geq 0$) redan konstruerats. (Ledning: Passaren ger cirklar och linjalen ger linjer. Analytisk geometri ger skärningarna som lösningar till vissa ekvationer.)

Konstruerbarhet av ett tal med bara passare och linjal är således likvärdigt med att man har upprepat konstruktionen $a \pm \sqrt{b}$ ett ändligt antal gånger: vid första konstruktionen är a och b rationella.

Vårt sista steg är att visa att ekvationen

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

inte har några lösningar av formen $a \pm \sqrt{b}$, där konstruktionen upprepats ändligt många gånger utgående från rationella tal.

- Visa att ekvationen inte har någon rationell rot. (Ledning: Anta att p/q är en rot där p och q är hela tal utan gemensamma faktorer. Detta leder till $8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$ och det följer att p delar 1, q delar 2.)

Anta nu att ekvationen har en rot av formen $a + \sqrt{b}$ (alternativt $a - \sqrt{b}$) där antalet rotutdragningar vid konstruktionen är minimalt.

- Visa att ekvationen då också har en rot $a - \sqrt{b}$ ($a + \sqrt{b}$). (Ledning: Ekvationen kan skrivas $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Dividera högra ledet med lämplig faktor.)

Därmed har $8x^3 - 6x - 1$ faktorn $x^2 - 2ax + a^2 - b$.

- Visa att $a^2 - b \neq 0$ och att ekvationen då har en rot $\frac{1}{8(a^2-b)}$. (Ledning: Identifiera rötternas produkt som en koefficient i ekvationen.)

Allt är nu klart eftersom roten $\frac{1}{8(a^2-b)}$ kan konstrueras med ett antal rotutdragningar som är strikt mindre än det minimala: $a+\sqrt{b}$ $(a-\sqrt{b})$ hade ett minimalt antal. Vi har alltså fått en motsägelse. Detta innebär att ekvationen $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$ inte har någon rot på formen $a \pm \sqrt{b}$ (ändligt många rotutdragningar med start i rationella tal) och sådana tal var ju de enda som kunde konstrueras enbart med passare och linjal.

Litteratur

En mycket lättläst bok (jag läste den själv som gymnasist) är

Courant, R. & Robbins, H., *What is Mathematics.* Oxford University Press, Oxford 1978,

varifrån idén till uppgiften hämtats. Boken borde finnas tillgänglig i skolbiblioteket för elever på NT–linjerna.

En bok på universitetsnivå är t ex

van der Waerden, B.L., *Algebra I.* Springer–Verlag, 1964.