Om $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Lennart Carleson

KTH och Uppsala universitet

Vi börjar med att försöka uppskatta ovanstående integral, som vi kallar I, numeriskt. Vi delar in intervallet $(0,1)$ i $n-1$ lika delar med delningspunkterna $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Om vi kallar funktionen $f(x)$ och $y_i = f(x_i)$ är den enklaste approximationen

$$\frac{1}{n}\big[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}\big] \tag{1}$$

som vi får genom att ersätta kurvan i (x_i, x_{i+1}) med den räta linjen $y = y_i$.

1. Gör ett dataprogram som utför detta.

Vi ser att det erhållna värdet är för stort eftersom vår approximerande kurva ligger över $f(x)$. Vi kan ersätta (1) med

$$\frac{1}{n}\big[y_1 + y_2 + \cdots + y_n\big] \tag{2}$$

och gör då motsvarande fel i andra riktningen.

Bättre är att ersätta kurvan men den räta linjen från (x_i, y_i) till (x_{i+1}, y_{i+1}). Vi har då att beräkna ytan av ett parallelltrapets i varje intervall som har ytan

$$\frac{1}{2n}(y_i + y_{i+1}).$$

Om vi sedan adderar alla dessa får vi den obetydliga förändringen

$$\frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \frac{1}{2n}y_n. \tag{3}$$

2. Gör dataprogram och notera vad vi får för approximativt värde på I för några olika n.

Ändå bättre borde vara att ersätta kurvan i intervallet (x_i, x_{i+2}) med en parabel $y = ax^2 + bx + c$ som för $x = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ antar värdena y_i, y_{i+1}, y_{i+2}. Ytan under parabeln är

$$\frac{a}{3}(x_{i+2}^3 - x_i^3) + \frac{b}{2}(x_{i+2}^2 - x_i^2) + c(x_{i+2} - x_i) \tag{4}$$

och villkoren är

$$ax_j^2 + bx_j + c = y_j, \quad j = i, i+1, i+2. \tag{5}$$

Vi måste alltså eliminera a, b, c ur (4) och (5), räkna ut (4) och addera (4) för $i = 0, 2, 4, \ldots, n-2$ och vi bör anta att n är ett jämnt tal.

För att förenkla algebran antar vi $i = 0, 1, 2$ och att $x_0 = -\frac{1}{n}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{n}$. (4) blir då

$$\frac{2}{3}\frac{a}{n^3} + \frac{2c}{n}. \tag{6}$$

Ur (5) får vi att $c = y_1$ (välj $x_j = x_1 = 0$). a får vi genom att addera (5) för $j = 0, 2$:

$$\frac{2a}{n^2} + 2y_1 = y_0 + y_2.$$

Det slutliga uttrycket för (4) blir

$$\frac{1}{n}(\frac{2}{3}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2)$$

eller om vi återgår till de ursprungliga beteckningarna

$$\frac{1}{n}\frac{2}{3}(y_i + y_{i+1} + y_{i+2}). \tag{7}$$

Vi skall nu addera (7) för $i = 0, 2, 4 \ldots, n-2$ och finner formeln

$$(8)\quad \frac{1}{n}\left\{\frac{2}{3}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \frac{4}{3}y_4 + \cdots + \frac{4}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_n\right\}.$$

Kontrollera att om alla $y_i =$ t.ex. 1, formeln ger värdet 1. Observera att n är ett jämnt tal.

3. Gör dataprogram som räknar ut (8).

4. Gör motsvarande kalkyler då vi använder polynom av 3:e graden och 4 konsekutiva punkter.

För vår ursprungliga funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ har vi nu fått 3 olika serier av approximativa värden på I. Om vi noterar vad $4I$ blir ser vi att I måste vara $\pi/4$, och vi ser också hur metoderna förbättrats genom att jämföra samma n för de tre metoderna. För att beräkna I exakt inför vi som vanligt

$$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad A'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi byter nu variabler genom att sätta $x = \operatorname{tg} u$, $u = 0$ motsvarar $x = 0$ och $u = \frac{\pi}{4}$ motsvarar $x = 1$. Då gäller

$$\begin{aligned}\frac{dA}{du} &= \frac{dA}{dx}\frac{dx}{du} = \frac{1}{1+x^2}\frac{d\operatorname{tg} u}{du} \\ &= \cos^2 u \cdot \frac{1}{\cos^2 u} = 1.\end{aligned}$$

Alltså är $A = u$ eftersom $A(0) = 0$. Vi får alltså mycket riktigt

$$I = \pi/4.$$

Vi kan serieutveckla $\frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

om $|x| < 1$. Vi har faktiskt följande likhet

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \pm x^{2n} \mp \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Alltså gäller för

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^4 - \cdots \pm x^{2n})$$

att

$$|g(x)| \leq x^{2n+2}.$$

Då följer ju också

$$|\int_0^1 g(x)dx| \leq \int_0^1 |g(x)|dx \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx = \frac{1}{2n+3}.$$

Alltså gäller

$$|\frac{\pi}{4} - \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - \cdots \pm x^{2n})dx| \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$|\frac{\pi}{4} - (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots \pm \frac{1}{2n+1})| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Serien

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

är alltså konvergent och har summan $\pi/4$.

5. Prova att räkna ut summan för några värden på n; vi ser att detta är en dålig metod att räkna ut π.

Vi kan göra motsvarande studie av $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Eftersom

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

har J värdet $\log 2$ och precis som förut ser vi att

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\cdots=\log 2.$$

Skulle man inte då kunna räkna ut

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\dots \tag{9}$$

genom att studera $K=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$? Naturen har tydligen (med Newton som uttolkare) ordnat det så att I och J har "enkla" uttryck, d.v.s. värden som är relaterade till tal som vi känner i andra sammanhang. Som vi skall se gäller detta även K, även om uttrycken blir mer komplicerade.

Vi skall alltså räkna ut K.

Följande algebraformel kan lätt kontrolleras:

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Vi räknar nu ut integralen från 0 till 1 för de tre termerna i högerledet. Den första ger som tidigare $\frac{1}{3}\log 2$. I den andra observerar vi att

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

antar lika stora värden med motsatt tecken i symmetriska punkter kring $\frac{1}{2}$. Alltså gäller

$$\int_0^{1/2} f(x)dx=-\int_{1/2}^1 f(x)dx.$$

Den andra termen ger alltså bidraget 0. Den tredje, L, är symmetrisk kring $x=\frac{1}{2}$ och alltså är

$$L=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^2+\frac{3}{4}}. \tag{10}$$

Denna integral räknar vi ut precis som förut. Vi sätter $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} u$; $(x = 0,\ u = 0)$ och $(x = \frac{1}{2},\ u = \frac{\pi}{6})$ motsvarar varandra.

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{4}{3}\cos^2 u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 u} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

så att

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot u.$$

Alltså gäller för L ur (10), $L = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Vi har nu räknat ut allt och funnit att serien (9) har värdet

$$\frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6. Gå igenom och redovisa alla detaljer i ovanstående resonemang.

7. Faktum är nu att även serien

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} \pm \dots$$

låter sig beräknas. Arbeta med detta baserat på en formel

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1} + \frac{cx+d}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}$$

där först konstanterna a, b, c, d skall bestämmas.

Litteratur

Hyltén-Cavallius, C.–Sandgren, L., *Matematisk analys I* (Spec. kapitel 10). Studentlitteratur, Lund 1964.