Konvexa funktioner

Urban Cegrell

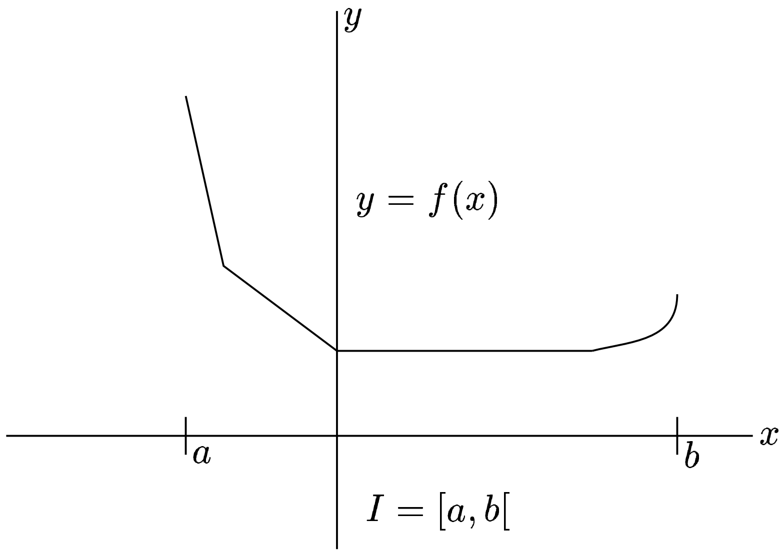
Umeå Universitet

Vi skall titta på reellvärda funktioner som har egenskapen att varje korda till funktionskurvan ligger över funktionskurvan. Sådana funktioner kallas konvexa och vi gör en ordentlig definition.

Definition. Låt I vara ett intervall. Vi säger att f är *konvex* på I om för varje $x \in I,\ y \in I,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ det gäller

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Så här kan det se ut



(Ibland talar man också om konkava funktioner, f är konkav precis då $-f$ är konvex.) Konvexa funktioner dyker upp såväl inom matematiken som i praktiska problem. Avsikten med denna uppgift är att undersöka konvexa funktioner från matematisk synvinkel.

1. Visa att

   a) $f(x) = x^2$ är konvex på $I = \mathbf{R} =$ alla reella tal.

   b) $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ är konvex på $\mathbf{R}$.

2. Visa att om f är konvex på $[a, b]$ och om vi har tal

$$a \leq x_j \leq b, \quad 1 \leq j \leq p$$

och

$$0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq p$$

så att

$$\sum \lambda_j = 1$$

så

$$f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(x_j).$$

(Ledning: Sant då $p = 2$. Antag sant för p, visa för $p + 1$.)

3. Visa att om f är konvex så är f kontinuerlig. (Om du inte är säker på vad kontinuerlig betyder, se Appendix I i nedanstående bok.)

4. Antag att f och g är konvexa. Visa att $\max(f, g)$ också är konvex och använd detta för att visa att det finns konvexa funktioner som inte är deriverbara överallt. (Jmf.1b.) (Betr. *deriverbar* se kapitel 3 i nedanstående bok.)

5. Visa att om f är konvex på $I = (a, b)$ och om $a < x_0 < b$ så finns en funktion på formen $y = Kx + L$ där K och L är konstanter (dvs en rät linje) så att $f(x) \geq Kx + L$ för alla $x \in I$ och så att $f(x_0) = Kx_0 + L$.

6. Antag att f är två gånger kontinuerligt deriverbar (dvs f'' existerar och är kontinuerlig). Visa att f är konvex om och endast om $f''(x) \geq 0$ för alla $x \in I$.

7. Visa att $f(x) = e^{-\alpha x}(-\infty < \alpha < +\infty)$ är konvex på $\mathbf{R}$.

8. Visa att följande funktioner är konvexa på $\{x \in \mathbf{R}\ x > 0\}$

a) $f(x) = x^p \qquad (1 \leq p < +\infty)$

b) $f(x) = -(x)^p \quad (0 < p < 1)$

c) $f(x) = -\log x$.

9. Visa olikheten

$$(x_1 \cdot \cdots \cdot x_m)^{1/m} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}$$

då

$$0 \leq x_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

(Ledning: Använd 8c.)

10. Antag att ni har en reellvärd funktion $H(x, y)$ definierad på rektangeln

$$a \leq x \leq b \quad (-\infty < a < b < +\infty)$$

$$c \leq g \leq d \quad (-\infty < c < d < +\infty)$$

så att för varje fixt x är $H(x, \cdot)$ konvex och för varje fixt y är $H(\cdot, y)$ konkav. Då kan man visa att

$$\max_{a \leq x \leq b} \min_{c \leq y \leq d} H(x, y) = \min_{c \leq y \leq d} \max_{a \leq x \leq b} H(x, y).$$

Kan du visa en del av detta resultat genom att visa att vänstra ledet aldrig kan vara större än högra ledet.

11. Konvexitet går bra att definiera i rum med större dimension än 1. Vi nöjer oss med att undersöka fallet då definitionsområdet är en rektangel i $\mathbf{R}^2$, $Q = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2;\ a \leq \xi \leq b,\ c \leq \eta \leq d\}$. Vi säger att en reellvärd funktion f är konvex på Q om $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ för varje val av x och y i Q och λ, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Visa att $(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$ är konvex.

12. Låt $g(\xi, \eta) = \xi\eta$ som ju är en väldefinierad funktion på Q. Det är ju klart (?) att för varje fixt ξ så är $g(\xi, \eta)$ en konvex funktion i η och på samma sätt är för varje fixt η, $g(\cdot, \eta)$ en konvex funktion i ξ. Är g konvex på Q?

Litteratur

Dunkels, A., Ekblom, H., Grennberg, A., Hedberg, T., Hensvold, E., Kallioniemi, H., Näslund, R., *Derivator, Integraler och sånt ...*. Teknologkårens bokförsäljning, Högskolan i Luleå 1977.