Om Pythagoras hade varit taxichaufför i Luleå

ANDREJS DUNKELS

Högskolan i Luleå

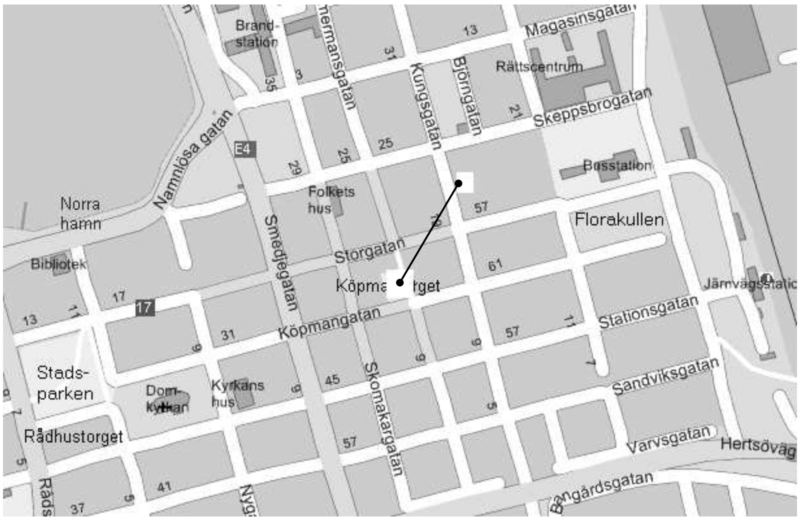


Fig 1.

Om man vill ta sig från P-platsen i hörnet av Köpmangatan och Timmermansgatan till Vinbutiken (se fig 1) så går det inte att snedda fågelvägen. Men man kan promenera – eller åka taxi – Köpmangatan till Kungsgatan och svänga åt vänster där. Om Pythagoras hade varit taxichaufför i Luleå och man frågat honom om avståndet mellan denna P-plats och Vinbutiken, så hade han svarat med summan av biten längs Köpmansgatan och biten längs Kungsgatan. Han skulle inte ha sagt att avståndet är kvadratroten ur summan av dessa bitars kvadrater. Många generationer skolbarn skulle ha jublat om Pythagoras hade varit taxichaufför. Tänk att slippa kvadrater och kvadratrötter! Avståndsberäkning utan tandagnisslan och rotutdragning.

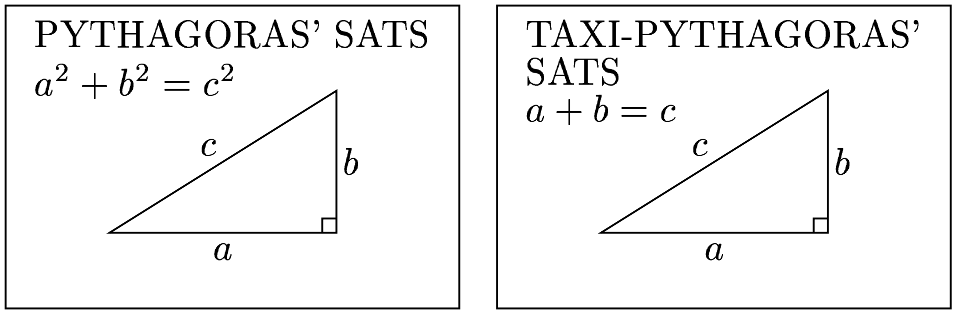
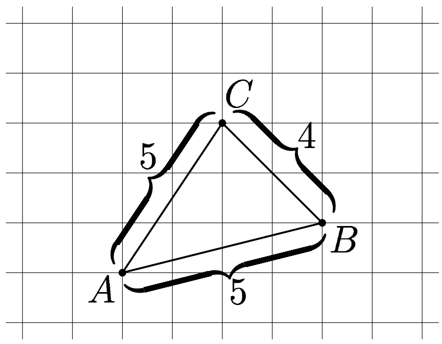


Fig 2.

Låt oss studera några geometriska begrepp och se hur de ter sig om man med avstånd mellan två punkter menar *taxi-avståndet*, dvs den sammanlagda sträckan som man tillryggalägger när man först går horisontellt och sedan vertikalt från den ena punkten till den andra.



$$|AB| = 4 + 1$$
$$|BC| = 2 + 2$$
$$|CA| = 2 + 3$$

Fig 3.

Hur ser t ex en taxi-cirkel ut? I fig 3 har vi markerat två punkter B och C på taxi-avstånd 5 från A. Och det är lätt att hitta fler. Man går bara först horisontellt därefter vertikalt så att summan blir 5. Mängden av *alla* punkter på taxi-avståndet 5 från A är taxi-cirkeln med centrum i A och taxi-radie 5 (se fig 4).

Hur ser då taxi-mittpunktsnormalen till en sträcka ut? För att förenkla beskrivningen inför vi ett rätvinkligt koordinatsystem med samma skala på båda axlarna. Låt sträckan ha ändpunkterna $(0, 0)$

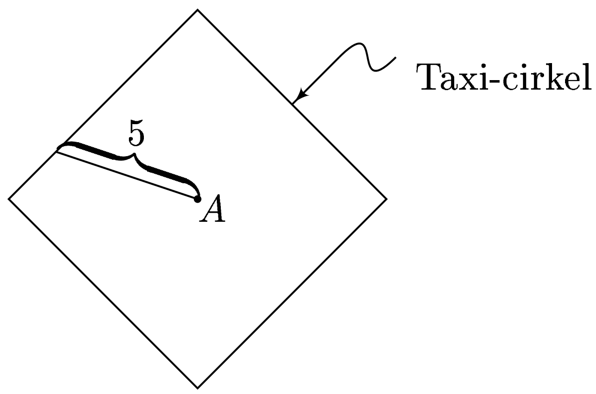


Fig 4.

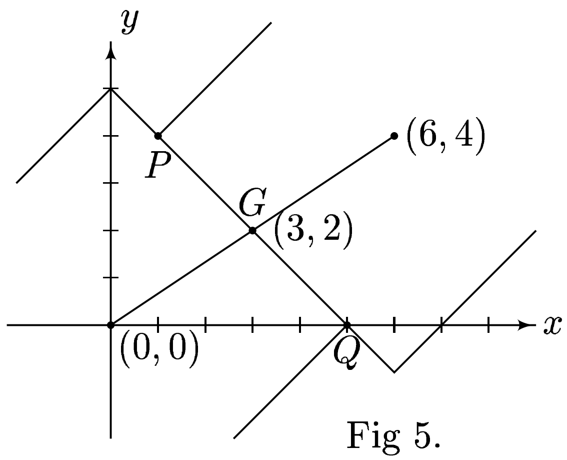


Fig 5.

och $(6,4)$. Mittpunktsnormalen kan beskrivas utan begreppet vinkel som mängden av alla punkter på lika avstånd från sträckans ändpunkter. I vårt fall finner vi först lätt sträckans mittpunkt $(3,2)$. Därefter kan vi till exempel rita två taxi-cirklar med radie 5, en med centrum i $(0,0)$ och en med centrum i $(6,4)$. Dessa cirklars gemensamma del G ligger då på den sökta taxi-normalen (se fig 5). Innehåller den flera punkter? Om vi rör oss från P (se fig 5) utanför G åt höger, rakt eller snett, så kommer vi att närma oss $(6,4)$ och avlägsna oss från $(0,0)$. Inga punkter till höger om P tillhör således vår sökta normal. Om vi rör oss åt vänster från P närmar vi oss $(0,0)$ och avlägsnar oss från $(6,4)$, dvs normalen finns inte till vänster om

P heller. Om vi emellertid rör oss rakt upp så ökar taxi-avståndet till $(6,4)$ med precis lika mycket som till $(0,0)$. Alla punkter rakt ovanför P ligger alltså på den sökta normalen. Ett liknande resonemang kan föras utgående från Q och vi får taxi-mittpunktsnormalen enligt fig 6.

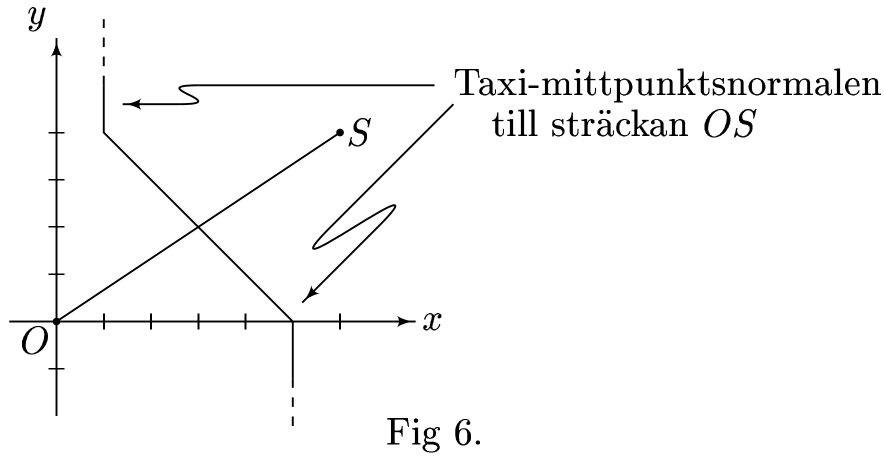


Fig 6.

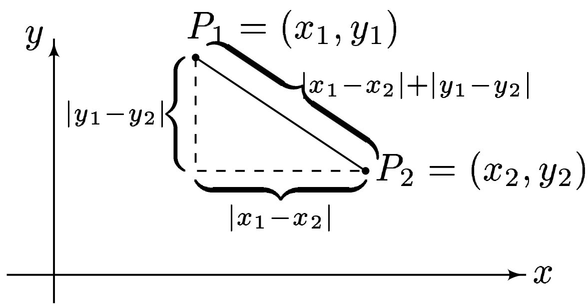


Fig 7.

Lägg märke till att vi också skulle ha kunnat söka alla skärningspunkter mellan cirklar med lika radier och centrum i $(0,0)$ respektive $(6,4)$.

Någon kanske föredrar att behandla problemet analytiskt. Hur ser då avståndsformeln ut? Den härleder man lätt med hjälp av Taxi-Pythagoras' sats (se fig 7). Speciellt får vi alltså att $|x| + |y|$ ger avståndet från en godtycklig punkt (x, y) till origo och $|x-6| + |y-4|$

ger avståndet från (x, y) till $(6, 4)$. Problemet att bestämma vår taxi-mittpunktsnormal kan således formuleras så här: Lös ekvationen

$$|x| + |y| = |x - 6| + |y - 4|.$$

(I läroböcker förekommer då och då övningar med mystiska ekvationer med absolutbelopp. Alla som undrat var de kommer ifrån har svaret här: Taxi-Pythagoras' värld.) Lösandet av ekvationen överlåter jag åt läsaren – jämför resultatet med fig 6.

Ser alla taxi-mittpunktsnormaler lika ut? Utredningen av detta överlåter jag åt var och en att genomföra. Ett förslag: pröva med änpunkterna $(1, 1)$ och $(4, 4)$ och var beredd på en överraskning.

Anledningen till att jag valt detta ämne är tvåfaldig. För det första är jag ute för att roa. För det andra vill jag ge exempel på ett område där man kan hitta många ämnen till specialarbeten i matematik för gymnasister. Man kan väl inte precis lära ut kreativt tänkande, men man kan stimulera till att öva denna förmåga. Taxi-geometrin tror jag lämpar sig utomordentligt väl för detta. Här finns mycket att undersöka, här finns problem av varierande svårighetsgrad – från direkta undersökningar av geometriska begrepp till djupare studium av euklidisk och icke-euklidisk geometri. Det finns mycket i undersökningen av taxi-mittpunktsnormalen som påminner om matematisk forskning. Dessutom föreställer jag mig att Du skall kunna komma så långt att Du själv kan formulera vettiga problem – har man funnit taxi-cirklar ger man sig på taxi-ellipser. Vad *är* egentligen en ellips? Hyperbel? Parabel?

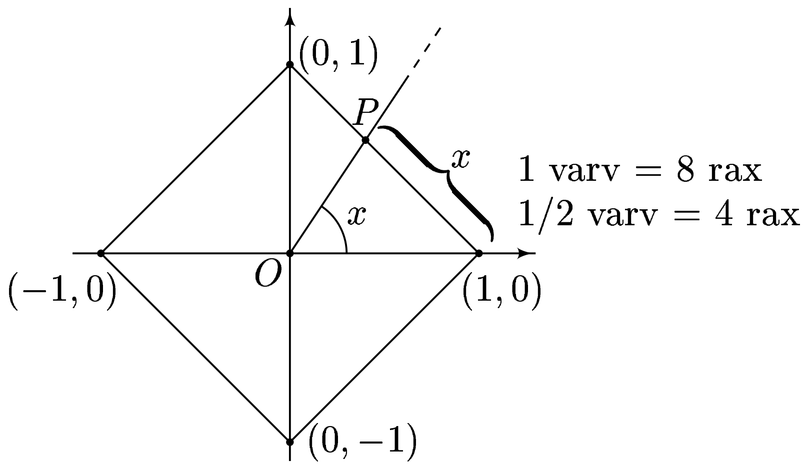


Fig 8.

Taxi-geometrin kan föras vidare till studium av taxi-trigonometri – låt oss kalla den för *trixonometri.* Utgående från taxi-enhetscirkeln gäller det bara att apa efter det vanlig sättet att definiera cosinus och sinus. Men allra först måste man skaffa sig ett lämpligt vinkelmått, det s k *raxianmåttet* (se fig 8). Vi inför så de trixonometriska funktionerna (se fig 8) *tosinus* och *tinus* utgående från koordinaterna för punkten P:

$$P = (\text{tos}\, x, \text{tin}\, x).$$

Vi får lätt t ex

$$\begin{cases} \text{tos } 0 = 1, \\ \text{tin } 0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{tos } 1 = 1/2, \\ \text{tin } 1 = 1/2, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{tos } 4 = -1, \\ \text{tin } 4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{tos } 6 = 0, \\ \text{tin } 6 = -1. \end{cases}$$

Man ser också att taxi-π är exakt 4 – avsevärt enklare än i vår vanliga omvärld. Trixonometriska ettan, som ju är en direkt följd av Taxi-Pythagoras' sats, blir

$$|\text{tos } x| + |\text{tin } x| = 1.$$

Detta är bara början. Mycket spännande återstår att pröva. Hur ser till exempel kurvorna $y = \text{tos } x$ och $y = \text{tin } x$ ut? Övriga trixonometriska funktioner? (Problem med benämningen av taxi-tangensfunktionen uppstår – fritt fram för fantasin!)

Här har jag tagit upp ett fåtal spridda detaljer från ett rikt fält. Som sagt, svaren är inte givna på förhand, de är ibland lätta att komma åt, ibland svåra; ibland förvånande, oftast roande.

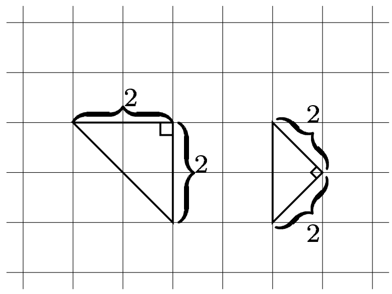


Fig 9.

Låt oss avslutningsvis titta på trianglarna i fig 9. Två sidor och mellanliggande vinkel är lika. Men trianglarna är ju inte kongruenta. I själva verket skiljer sig taxi-geometrin från den traditionella euklidiska geometrin just ifråga om det axiom som motsvarar *första kongruensfallet* och ingenting annat.

Litteratur

Kolmogorov, A.N. och Fomin, S.V., *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Vol 1.* Graylock Press, Rochester, N Y 1957. (Speciellt fig 16 s 74.)

Krause, E.F., Taxicab Geometry. *The Mathematics Teacher*, 66:8 (1973), s 695–706.

Straley, H.W., A Metric World. *The Mathematics Teacher*, 66:8 (1973), s 713–721.

Anderson, A.J., What is an Ellipse? *Mathematics Teaching*, 65 (1973), s 19, 39–42.

Georgou, W.J., Square Trigonometry. *The Pentagon. A Mathematics Magazine for Students*, 31:1 (1971), s 3–13.

Detta är en omarbetad version av en artikel med samma namn i *Elementa* 59 (1976), s 16–21. Se även Björn Gustafsson Något om metriker i denna volym.