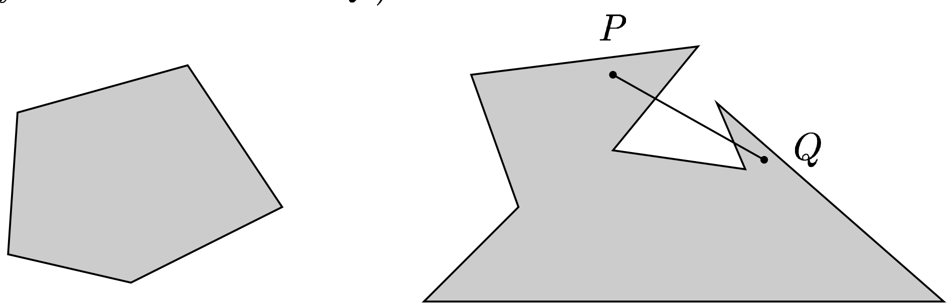
Polyedrar och polygoner

Ralf Fröberg

Stockholms universitet

En polygon är en plan figur som begränsas av linjestycken. Vi begränsar oss till konvexa, begränsade polygoner. (En polygon F är konvex om den till varje par av punkter P och Q innehåller hela linjestycket mellan P och Q.)



Konveks Ej konveks

En *kant* till en polygon är ett linjestycke som begränsar polygonen, ett *hörn* är skärningspunkten mellan två kanter. Om K är antalet kanter och H antalet hörn gäller $K - H = 0$. En *regelbunden* polygon är en polygon med "identiska" kanter och hörn. (Alla kanter är lika långa, vinklarna i alla hörn är lika stora.) En polygon med n kanter kallas n–gon. En regelbunden 3–gon är alltså en liksidig triangel, en regelbunden 4–gon är en kvadrat o s v.

Övning 1. Bestäm vinkelsumman i en n–gon.

Övning 2. Bestäm vinkeln vid varje hörn i en regelbunden n–gon.

En polyeder är en 3–dimensionell figur som begränsas av polygoner. Vi begränsar oss till konvexa polygoner. De 2–dimensionella begränsningsytorna kallas *sidor*. Skärningen mellan två närliggande sidor kallas *kant* och skärningspunkten mellan två närliggande kanter kallas *hörn*. En polyeder har minst 4 hörn. En polyeder med 4 hörn har 6 kanter och 4 sidor och kallas *tetraeder*. Om S är antalet sidor, K antalet kanter och H antalet hörn gäller alltså $S-K+H=2$. Vi ska visa att denna formel (Eulers relation) gäller för alla polyedrar. Vi har visat att den gäller för polyedrar med 4 hörn. Antag nu att en polyeder S har 5 hörn. Välj ut ett hörn P och låt närliggande hörn vara $P_1, P_2, \ldots, P_n$. (Det gäller här att $n = 3$ eller $n = 4$.) Vi ska se vad som händer med formeln $S-K+H$ då vi tar bort hörnet P och alla kanter och sidor som P ligger på och lägger till en ny sida $P_1P_2 \ldots P_n$ (om den inte redan finns). Om den nya figuren blir en tetraeder har vi tagit bort ett hörn, tre kanter och tre sidor samt fått en ny sida. Vi ser alltså att $S-K+H$ är lika stor för de två figurerna. I annat fall får vi en 4–gon och vi har tagit bort ett hörn, fyra kanter och fyra sidor.

ÖVNING 3. Visa att formeln $S-K+H=2$ gäller även i detta fall.

ÖVNING 4. Vi vet nu att $S-K+H=2$ gäller för alla polyedrar med högst 5 hörn. Visa på samma sätt som ovan att formeln är sann om $H=6$.

Vi antar nu att Eulers relation är visad för alla polyedrar med N hörn. För en polyeder med $N+1$ hörn väljer vi ut ett hörn P och antar att $P_1, P_2, \ldots, P_n$ är de hörn som är grannar till P. Vi gör som förut en ny figur med N hörn genom att ta bort P och alla kanter och sidor som innehåller P. Vi lägger till sidan $P_1P_2 \ldots P_n$ om den inte redan finns. Om den nya figuren är en polyeder med N hörn har vi tagit bort ett hörn, n kanter och n sidor och fått en ny sida, så $S-K+H$ ändras inte i detta fall. Om den nya figuren är en N–gon har vi tagit bort ett hörn, n kanter och n sidor och inte fått någon ny sida. Vi ser att $S - K + H$ minskar med ett när vi tar bort ett hörn i detta fall. I en N–gon gäller $S - K + H = 1$ eftersom $S = 1$ och $K - H = 0$, så vi får $S - K + H = 2$ för den polyeder vi startade med även i detta fall. Vi har nu visat att formeln är sann för alla polyedrar. (Eftersom den är sann för polyedrar med 6 hörn är den sann för polyedrar med 7 hörn och alltså för polyedrar med 8 hörn o s v.) En polyeder kallas *regelbunden* (eller en platonsk kropp) om alla sidor, kanter och hörn är "identiska". En regelbunden polyeder har alltså regelbundna n–goner som sidor och i varje hörn möts lika många sidor och vinklarna mellan dessa är lika stora.

ÖVNING 5. Visa att en regelbunden polyeder har antingen trianglar, kvadrater eller regelbundna 5–hörningar som sidor. (Använd övning 2.)

Antag nu att r sidor möts i varje hörn och att varje sida är en n–gon.

ÖVNING 6. Visa att $(r-2)(n-2) < 4$. (Använd övning 1.)

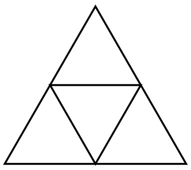
ÖVNING 7. Visa att de enda lösningarna till ovanstående olikhet är $(r, n) = (3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ och $(5, 3)$.

Det kan bara finnas en figur för varje möjlig lösning eftersom utseendet vid ett hörn bestämmer hela figuren (bortsett från storleken). För varje möjlig lösning kan man konstruera en regelbunden polyeder, de blir i ordning tetraeder, oktaeder, ikosaeder, kub och dodekaeder, Antalet sidor är 4, 8, 20, 6 resp 12.

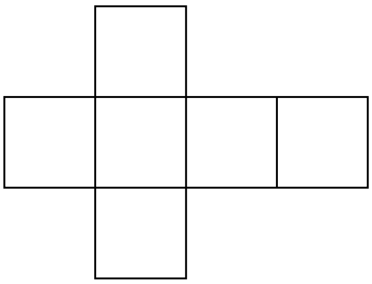
Låt K vara en regelbunden polyeder. Vi bildar en ny polyeder K' genom att som hörn ta mittpunkterna på varje sida i K och som kanter linjestyckena mellan par av närliggande mittpunkter. Den nya polyedern K' kallas dualen till K och blir regelbunden.

ÖVNING 8. Bestäm dualen till var och en av de fem regelbundna polyedrarna.

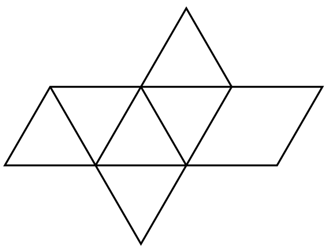
ÖVNING 9. Förstora följande figurer på ett papppark och tillverka de fem regelbundna polyedrarna.



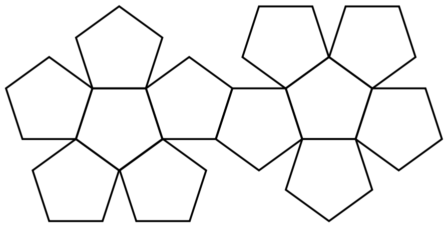
Tetrahedron $\{3, 3\}$



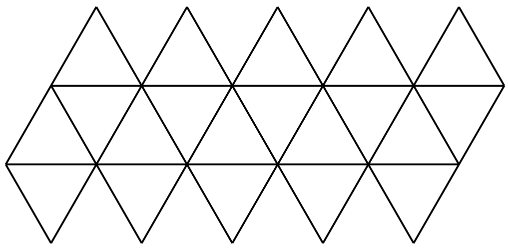
Cube $\{4, 3\}$



Octahedron $\{3, 4\}$



Dodecahedron $\{5, 3\}$



Icosahedron $\{3, 5\}$