Möbiusgruppen och icke–euklidisk geometri

LARS GÅRDING

Lunds Universitet

Meningen med detta förslag till enskilt arbete är att alla uppgifter U redovisas skriftligt med fulla motiveringar och att alla utelämnade figurer ritas. Möbius (1790-1863) var en tysk matematiker. Den modell av den icke-euklidiska geometrin som presenteras här föreslogs av Poincaré (1854-1912). En enkel bok om icke-euklidisk geometri är

Meschkowski, H., *Non-euclidean Geometry.* Academic paperbacks, Academic Press 1965.

Möbiusfunktioner. En *Möbiusfunktion* är helt enkelt en bruten linjär funktion av en komplex variabel z,

$$z \to f(z) = (az + b)/(cz + d) \tag{1}$$

där a, b, c, d z är komplexa tal sådana att $ad - bc \neq 0$, ett villkor som förhindrar att funktionen f är konstant.

U. Visa det sista påståendet. (Ledning. Visa att $ad - bc = 0$ då $f(z_1) = f(z_2)$ och $z_1 - z_2 \neq 0$.)

U. Visa att varje Möbiusfunktion kan skrivas i formen (1) där $ad - bc = 1$

Det är uppenbart att $f(z) = 1/z$ är en Möbiusfunktion. För att den ska vara definierad också för $z = 0$, inför man en punkt ∞ i oändligheten i det komplexa planet. Det på det sättet utvidgade planet komplexa planet betecknar vi med C^*. Om f ges av (1), sätter vi naturligtvis $f(\infty) = a/c$ och $f(-d/c) = \infty$. Observera att villkoret $ad - bc \neq 0$ medför att varken a/c eller d/c har formen $0/0$ och alltså är väl definerade och antar värdet ∞ då en nämnare är noll. Belöningen för dessa djärva steg är följande

SATS. *Varje Möbiusfunktion är en bijektion av C^* och dess invers är också en Möbiusfunktion.*

U. Bevisa satsen, dvs att $f(z)$ avbildar C^* på sig själv och att ekvationen $f(z) = w$ har den entydiga lösningen $z = (dw - b)/(-cw + a)$ då w är ett komplext tal eller ∞.

U. Sammansättningen $f \circ g$ av två funktioner f och g definieras av

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)).$$

Visa att $f \circ g$ är en Möbiusfunktion då f och g är det. Visa att det till varje Möbiusfunktion f finns en invers Möbiusfunktion g sådan att $f \circ g(z) = g \circ f(z) = z$ för alla z. (Ledning. Föregående uppgift.) Man brukar beteckna den inversa funktion med f^{-1} och har då $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$ där e betecknar identiteten $e(z) = z$ för alla z. Av $f \circ g = h$ följer då att $g = f^{-1} \circ h$. (Observera att f^{-1} är den inversa funktionen och inte detsamma som $f(z)^{-1} = 1/f(z)$.)

Anmärkning. En samling bijektioner av en mängd X som innehåller den identiska funktionen och med varje funktion också dess invers kallas en transformationsgrupp. Alla Möbiusfunktioner bildar alltså en transformationsgrupp.

U. En Möbiusfunktion f sådan att $f(\infty) = \infty$ sägs vara *affin.* Visa att de affina funktionerna har formen

$$f(z) = Az + B$$

där $A \neq 0$. Tolka fallet $A = 1$ geometriskt (en translation), fallet $B = 0, |A| = 1$ (en vridning kring origo) och fallet $B = 0, A > 0$ (en sträckning eller homoteti med centrum i $z = 0$). Illustruera de olika fallen med figurer.

U. Visa att alla affina funktioner bildar en transformationsgrupp och att varje affin funktion avbildar cirklar i cirklar.

U. Funktionen $f(z) = 1/z$ kallas en *inversion*. Visa att den överför cirkeln $|z| = 1$ i sig själv och det inre av cirkeln till det yttre och omvänt. Studera motsvarande avbildning av cirkeln i detalj.

U. Då $f(z) = (az + b)/(cz + d)0$ inte är affin, finn A och B sådana att

$$(az + b)/(cz + d) = A/(cz + d) + B.$$

Visa att detta innebär att $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ där f_3 är affin, f_2 en inversion och f_1 är affin.

Dubbelförhållande.

U. Visa att att det finns precis en affin funktion $z \to w = f(z)$ som överför två givna punkter $z_1 \neq z_2$ i två andra punkter w_1, w_2. Visa att sambandet kan skrivas som

$$(z - z_1)/(z - z_2) = (w - w_1)/(w - w_2).$$

Båda sidor i denna formel är något som brukar kallas för enkelförhållande. Det finns ett motsvarande *dubbelförhållande* för Möbiusfunktioner, som definieras av

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

där högra sidan definierar den vänstra. Det är alltså fråga om kvoten mellan två enkelförhållanden varav namnet.

U. I det komplexa planet är $1/\infty = 0$ och $1/0 = \infty$ men uttrycken $0/0$ och ∞/∞ är odefinierade. Visa att dubbelförhållandet är väl definierat precis då tre av talen z_1, z_2, z_3, z_4 är olika.

Nu kommer en viktig sats om dubbelförhållande och Möbiusfunktioner.

SATS. *Låt* z_1, z_2, z_3 *vara tre skilda punkter.*

1) Formeln

$$z \to (z, z_1; z_2, z_3)$$

definierar en Möbiusfunktion som avbildar punkterna z_1, z_2, z_3 *på* $0, \infty, 1$ *respektive.*

2) Om w_1, w_2, w_3 *är tre andra skilda punkter så definierar ekvationen*

$$(z, z_1; z_2, z_3) = (w, w_1; w_2, w_3) \tag{2}$$

en Möbiusfunktion $z \to w$ *som avbildar punkterna* z_1, z_2, z_3 *på punkterna* w_1, w_2, w_3.

3) En Möbiusfunktion är entydigt bestämd av sina värden i tre olika punkter.

U. Visa att om en Möbiusfunktion $f(z)$ överför punkterna $0, \infty, 1$ i sig själva så är den identiska funktionen, dvs $f(z) = z$ för alla z.

U. Visa satsen genom att till att börja med kontrollera 1) och visa att 2) följer av 1). Slutligen, visa att om en Möbiusfunktion f överför z_1, z_2, z_3 i w_1, w_2, w_3 och $g(z) = (z, z_1; z_2, z_3), h(w) = (w, w_1, w_2, w_3)$, så är $h \circ f \circ g^{-1}(z) = z$ då $z = 0, \infty, 1$ och alltså, enligt föregående uppgift, $f = h^{-1} \circ g$.

Cirkelområden. Genom tre separata punkter i planet går som bekant en entydigt bestämd cirkel. (Observera att en rät linje anses vara en cirkel med centrum i ∞.) En fjärde punkt ligger på samma cirkel precis då summan av motstående vinklar i den fyrhörning som de uppspänner är π eller noll beroende på om fyrhörningen är konvex eller inte. (Rita en cirkel och fyra punkter 1,2,3,4 på den som inte behöver följa varandra i ordning. Drag linjerna 12,23,34,41. Då är vinkeln med spetsen i 1 lika med vinkeln med spetsen i 3 eller också är deras summa lika med π.)

U. Låt de tre punkterna vara z_1, z_2, z_3 och låt z vara en fjärde punkt. Visa att z ligger på den cirkel som går genom de tre punkterna precis då $\arg(z, z_1; z_2, z_3)$ är noll eller π, dvs dubbelförhållandet är reellt. (Observera att vinklarna ska tas med tecken.)

Om vi definerar ett cirkelområde i planet som det inre eller yttre av en cirkel får vi nu följande viktiga sats som tillsammans med den föregående ger oss en nästan fullständig överblick över ämnet Möbiusfunktioner.

SATS. *En Möbiusfunktion avbildar cirklar på cirklar och cirkelområden på cirkelområden. Ett cirkelområde kan avbildas på varje annat cirkelområde genom en Möbiusfunktion.*

U. Visa att $f(z) = r(z-i)/(z+i)$ avbildar övre halvplanet på det inre av cirkeln $|z| = r$. Räkna ut inversen som alltså avbildar det inre av cirkeln på övre halvplanet.

Om C_1 och C_2 är cirkelområden och $f(z)$ och $g(z)$ är Möbiusfunktioner som avbildar C_1 på C_2 så är det klart att $h(z) = f \circ g^{-1}(z)$ avbildar C_1 på sig självt. Omvänt, om $h(z)$ har denna egenskap så avbildar $f \circ h(z)$ C_1 på C_2. För att veta vilka Möbiusfunktioner som avbildar ett givet cirkelområde på ett annat behöver man alltså bara känna till alla som avbildar ett givet cirkelområde, t. ex. *enhetsskivan* $|z| < 1$, på sig självt. I så fall avbildas också *enhetscirkeln* $|z| = 1$ och det yttre av enhetsskivan på sig själva. Observera att en Möbiusfunktion som avbildar en cirkel på sig själv mycket väl kan avbilda det inre av cirkeln på det yttre och tvärtom (ge ett exempel på detta).

SATS. *Då* $|a| < 1$ *och* $|b| = 1$ *avbildar*

$$f(z) = b(z-a)/(1-\bar{a}z) \tag{3}$$

enhetsskivan på sig själv och varje Möbiusfunktion med denna egenskap har formen (3).

U. Bevisa första delen av satsen genom att verifiera att $|f(z)| = 1$ då $|z| = 1$ och att $|f(0)| < 1$. Bevisa andra delen av satsen så här: om $g(z)$ avbildar enhetscirkeln på sig själv så finns ett a med $|a| < 1$ så att $g(a) = 0$. Men då avbildar $h = g \circ f$ enhetscirkeln på sig själv och $h(0) = 0$. Men då är $h(z) = z/(cz + d)$. Visa att detta medför att $c = 0$ och slutför beviset.

U. Att en cirkelskiva avbildas på en cirkelskiva betyder inte att mittpunkt avbildas på mittpunkt. Visa detta genom att låta $b = 1$ och $a = 0.5$ i (3). Skissera bilderna av cirklarna $|z| = 1/3$ och $|z| = 2/3$.

Spegelpunkter. Två punkter u och v sägs vara *spegelpunkter* med avseende på en linje om de är varandras spegelbilder i linjen. De är spegelpunkter med avseende på en cirkel om de ligger på en och samma linje genom cirkelns medelpunkt, på samma sida om medelpunkten och produkten av deras avstånd till cirkelns medelpunkt är lika med radiens kvadrat. (Rita figur, kontrollera att medelpunktens spegelbild ligger i oändligheten.)

U. Visa att om $f(z)$ är en affin funktion och u och v är spegelpunkter med avseende på en cirkel C så är $f(u)$ och $f(v)$ spegelpunkter med avseende på cirkeln $f(C)$

U. Visa genom att Möbiusfunktionen $f(z) = r(z-i)/(z+i)$ avbildar spegelpunkter med avseende på reella axeln på spegelpunkter med avseende på en cirkel med radien r.

U. Det finns en ekvivalent definition av begreppet spegelpunkt: två punkter u och v sägs vara spegelpunkter med avseende på en cirkel

C genom punkterna a, b, c precis då

$$(u, a; b, c) = \overline{(v, a : b, c)} = (\bar{v}, \bar{a} : \bar{b}, \bar{c}),$$

(den den sista likheten är en anmärkning). För att göra situationen tydlig ska vi skriva spegelpunkt(1) för den första och spegelpunkt(2) för den andra definitionen. Visa att om $f(z)$ är en Möbiusfunktion och u och v är spegelpunkter(2) med avseende på en cirkel C så är $f(u)$ och $f(v)$ spegelpunkter(2) med avseende på cirkeln $f(C)$. Visa att spegelpunkt(1) och spegelpunkt(2) betyder samma sak. (Ledning. Visa det senare först då cirkeln är reella axeln och, allmännare, då cirkeln är en rät linje. Använd en föregående uppgift till att visa att spegelpunkt(1)och spegelpunkt(2) är samma sak först för en cirkel med centrum i origo och sedan för vilken cirkel som helst.)

En modell av den icke-euklidiska geometrin. Ett av axiomen för den euklidiska geometrin, framställd i Euklides' Elementa cirka 400 år f. K., är parallellaxiomet som säger följande: genom en punkt utanför en rät linje kan en och endast en linje dragas som icke träffar den förra hur långt den än utdrages. Två linjer som på detta sätt inte har någon punkt gemensam sägs vara parallella och axiomet kallas parallellaxiomet. De övriga axiomen, t.ex. *genom två skilda punkter kan en och endast en rät linje dragas*, eller *två icke parallella linjer ha precis en punkt gemensam*, är betydligt enklare och man försökte därför länge bevisa parallellaxiomet från de övriga. Dessa bemödande tog slut då Lobachevski och Bolai i början av 1800-talet visade att det finns objekt som man kalla punkter och linjer som uppfyller alla axiom utom parallellaxiomet. Teorin för dessa objekt kallas den icke-euklidiska geometrin. Med hjälp av Möbiusgruppen är det lätt att hitta sådana objekt och dessutom kontruera en motsvarighet till den euklidiska geometrins kongruenstransformationer, dvs förflyttningar i planet som lämnar alla avstånd oförändrade. Det euklidiska planets motsvarighet är då det inre av en cirkel C där de räta linjernas motsvarighet är cirkelbågar som skär C ortogonalt. Meningen med de uppgifter som följer är att läsaren själv ska härleda de viktigaste satserna i den icke-euklidiska geometrin.

U. Låt C och D vara cirklar som skär varandra under rät vinkel. Visa att de punkter P och Q där en rät linje från C's medelpunkt skär D är spegelpunkter med avseende på C. (Ledning. Vilket bevis som helst får användas).

U. Låt P och Q vara två punkter i det inre av en cirkel C. Visa att det finns precis en cirkel genom P och Q som skär C ortogonalt och konstruera den.

U. Låt Punkter betyda punkter inuti en fast cirkel C (som vi identifierar med det icke-euklidiska planet) och Räta linjer betyda cirkelbågar i C som skär C under rät vinkel. Enligt det föregående går precis en Rät linje genom två skilda Punkter. Visa att två Räta linjer skär varandra i högst en Punkt men att parallellaxiomet inte är uppfyllt för Punkter och Räta linjer.

Avstånd. I det icke-euklidiska planet kan man införa ett avstånd. För enkelhetens skull låter vi det icke-euklidiska planet, här betecknat med E^*, vara enhetsskivan $|z| < 1$. Med en icke-euklidisk förflyttning menar vi en Möbiusfunktion $f(z)$ som avbildar E^* på sig självt. Alla dessa bildar tydligen en transformationsgrupp. Vi kallar den T.

U. Visa att det finns minst en Möbiusfunktion i T som överför en given Rät linje i en annan given Rät linje. Visa också att det finns en sådan funktion som överför en given Rät linje i sig själv och samtidigt en given Punkt på den Räta linjen till en annan given Punkt på den. (Ledning. Det räcker att verifiera den andra delen av uppgiften då den Räta linjen är reella axeln mellan 1 och -1.Varför?)

U. Då z och w är två Punkter på en Rät linje, definiera ett avstånd mellan dem genom formeln

$$d(z, w) = \log |(z, w; Z, W)|$$

där Z och W är ändpunkterna på den cirkelbåge som innehåller z och w och är vinkelrät mot enhetscirkeln. Visa att $d(z, w) = d(f(z), f(w))$ då $f(z)$ ligger i T och att

1) $d(z, w) = d(w, z) \geq 0$,

2) $d(z, w) = 0$ precis då $z = w$,

3) $d(z, w) = d(z, u) + d(u, w)$ då Punkten u ligger mellan z och w och på samma Räta linje.

(Ledning. Det räcker att visa detta då den Räta linjen är den del av reella axeln som ligger i E^*. Varför?)

4) $d(z, w)$ går mot oändligheten då en av punkterna går mot enhetscirkeln och den andra är fix.

Av 4) följer att man inte kan räkna enhetscirkeln till det icke-euklidiska planet. Det ligger i oändligheten. Ingen som vistas i det icke-euklidiska planet når någonsin dit.

U. Visa att om z, w, u, v är Punkter och $d(z, w) = d(u, v)$ så finns det en funktion f i T sådan att $f(z) = f(u), f(w) = f(v)$.

Icke-euklidiska cirklar och trianglar. En Cirkel i det icke-euklidiska planet E^* definieras som mängden av Punkter w sådana att $d(w, z)$ är en konstant som kallas cirkelns Radie. Punkten z kallas Cirkelns Medelpunkt.

U. Visa att varje Cirkel är en euklidisk cirkel men att dess radie och medelpunkt inte är Cirkelns Radie och Medelpunkt. (Ledning. Visa att Medelpunkt och medelpunkt är samma då medelpunkten ligger i $z = 0$ och visa sedan att två Cirklar kan överföras i varandra med en Möbiusfunktion i T precis då deras Radier är lika.)

U. Visa (figur!) att Cirklar med samma Radie som går mot oändligheten representeras av cirklar med allt mindre radier som går mot enhetscirkeln.

Det visas i ett appendix att en Möbiusfunktion bevarar vinklar. Det är därför överflödigt att definiera särskilda Vinklar i det icke-euklidiska planet. Som bekant spelar parallellaxiomet en avgörande roll då man visar att summan av innervinklarna i en euklidisk triangel är π. Detta är inte sant för en Triangel, dvs en icke-euklidisk triangel.

U. Visa att summan av innervinklarna i en Triangel är mindre än π. (Ledning. Visa med en figur att detta är sant då $z = 0$ är en inre punkt. Hur gör man då $z = 0$ inte är en inre punkt?)

U. Visa att det finns Trianglar med hörn i oändligheten där summan av innervinklarna är noll.

Anmärkning. Det förefaller då man ritar Trianglar att vinkelsumman blir mindre ju större Triangelns yta är och det är också sant. Det finns ett precist samband mellan dessa storheter (en sats av Gauss) som vi inte kan gå in på här. Om man bedriver icke-euklidisk geometri i en stor cirkel $|z| < R$ och låter R gå mot oändligheten blir geometrin inom ett begränsat område mer och mer lik den euklidiska.

Några numeriska uppgifter. Med ordet avbilda menas här att finna en Möbiusfunktion som avbildar.

U. Avbilda cirkelskivan $|z| < 1$ på cirkelskivorna $|z-1| < 2$, $|z-i| < 3$ och $|z-4| > 5$.

U. Avbilda cirkelskivan $|z| < 1$ på sig själv så att punkten $z = 1/2$ avbildas på sig själv. Finn sedan alla sådana avbildningar.

U. Avbilda cirkelskivan $|z-4|<1$ på övre halvplanet.

U. Avbilda övre halvplanet på sig självt så att punkten i övergår i sig själv. Finn sedan alla sådana avbildningar.

Appendix.

Vinklar. Trots att den avbildning $z \to f(z)$ av det komplexa planet i sig som förmedlas av en Möbiusfunktion $f(z)$ kan möblera om ganska ordentligt, t.ex. så att 0 avbildas på ∞, finns det någonting som inte ändras och det är vinklar. Låt h och k vara två komplexa tal som inte är noll. Om då t är ett reellt tal som genomlöper ett litet intervall $0 \le t < s$ där $s > 0$ är liten och fix, så betyder $t \to z+th$ och $t \to z+tk$ två små linjestycken L_1 och L_2 utgående från punkten z. (Rita en figur!). Vinkeln mellan dem är som bekant lika med $\arg h\bar{k}$. Om vi antar att $f(z)$ inte är ∞, så avbildas linjestyckena genom f på två små kurvstycken $f(L_1)$ och $f(L_2)$ utgående från $f(z)$ och givna av $t \to f(z+th)$ och $t \to f(z+tk)$. (Rita figur!)

U. Visa att tangentvektorerna T_1 och T_2 till dessa kurvor i punkten $f(z)$ är $h/(cz+d)^2$ och $k/(cz+d)^2$ (om $ad-bc=1$ och $f(z) = (az+b)/(cz+d)$). (Ledning. Derivera med avseende på t och sätt $t=0$.)

Om nu två kurvor som möts i ∞ antas ha samma tangentvektorer där som de har under avbildningen $z \to 1/z$, så ger denna övning en viktig

SATS. *Vinklar ändras inte vid avbildningar givna av Möbiusfunktioner.*